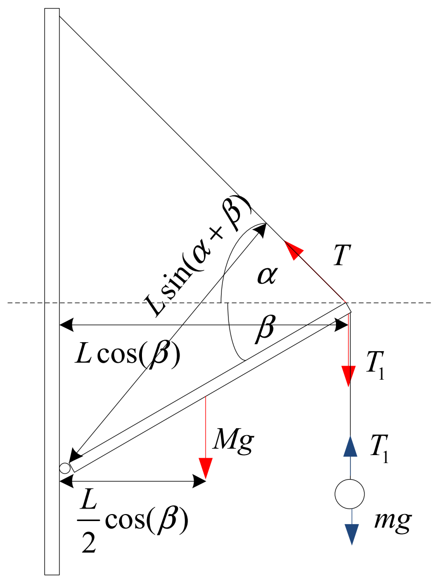
Pauta P1 C2 FI1002 2009-2

Elaborada por Eugenio Quintana

a)



Haciendo un DCL sobre m, se tiene:

$T_1 - mg = 0 \;\Rightarrow T_1 = mg \quad (0.25\, ptos)$

Escribiendo todas las fuerzas que hacen torque con respecto a la rótula (para no tomar en cuenta las fuerzas de reacción de la rótula), tenemos:

$\overrightarrow{\tau_{Mg}} = -Mg\frac{L}{2}\cos(\beta) \quad (0.5\, ptos)$

$\overrightarrow{\tau_{T_1}} = -mgL\cos(\beta) \quad (0.5\, ptos)$

$\overrightarrow{\tau_T} = TL\sin(\alpha + \beta) \quad (0.5\, ptos)$

Escribiendo así la condición de equilibrio estático $\sum_i \overrightarrow{\tau_i} = 0 \quad (0.25\, ptos)$ y despejando se tiene:

$$T = \frac{\left(\frac{M}{2}+m\right)g\cos(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\left(\frac{M}{2}+m\right)g}{\sqrt{2}\sin(\alpha+\beta)} \quad (0.25\, ptos)$$

Como $T > 0$ (En el caso contrario se tendría una inconsistencia física)

$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) > 0$

$\Rightarrow 0 < \alpha+\beta < \pi$

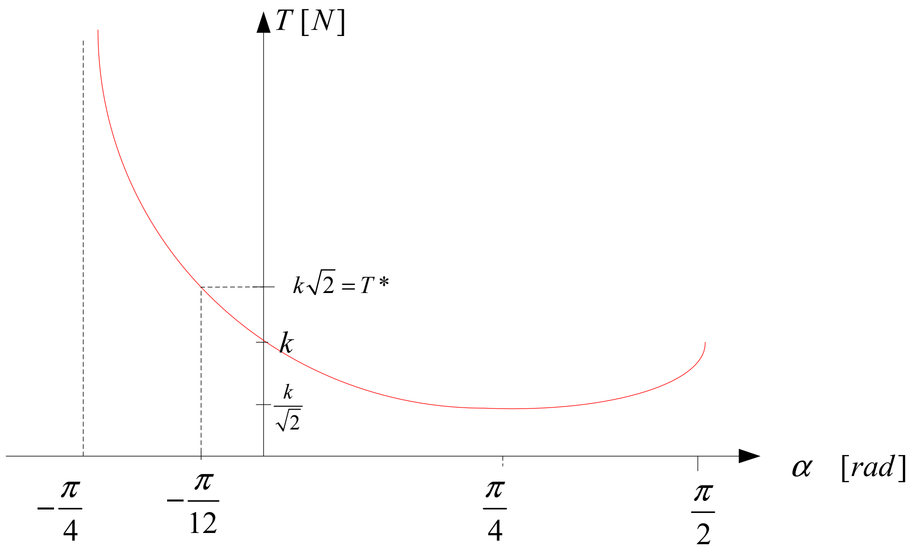
$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3}{4}\pi \quad (0.5\ ptos)$

Por condiciones geométricas tenemos que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Intersectando ambas condiciones se tiene que el rango posible del ángulo es:

$\Rightarrow \alpha \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (0.25\ ptos)$

Para que la Tensión sea mínima entonces $\sin(\alpha+\beta)$ tiene que ser máximo, o sea $\sin(\alpha+\beta) = 1$, lo cual implica que $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ y por lo tanto $T\left(\alpha = \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{M}{2}+m\right)g\ (0.25\ ptos)$. Evaluando la tensión en los extremos tenemos además que $T\left(\alpha = -\frac{\pi}{4}\right) = \infty$ y $T\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{M}{2}+m\right)g\ \ (0.25\ ptos)$.

Sea $k = \left(\frac{M}{2}+m\right)g$ y evaluando la tensión en ángulos convenientes el gráfico queda así (0.5 *ptos*):



b)

Si $T^* = \sqrt{2}\left(\frac{M}{2}+m\right)g$ igualando con la tensión encontrada en la parte anterior se tiene que

$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2} \quad (0.5\ ptos)$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}$ $(0.75\, ptos)$

Observando el gráfico obtenido en la parte anterior se ve claramente que el rango de α para el cual la cuerda no se corta es $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right)$ $(0.75\, ptos)$.

NOTA: Algunos llegaron a resultados coincidentes con la pauta solo por el hecho de que al ser $\beta = \frac{\pi}{4}$ el problema tenía una cierta simetría, pero aún teniendo mismos números la asignación es 0 puntos.