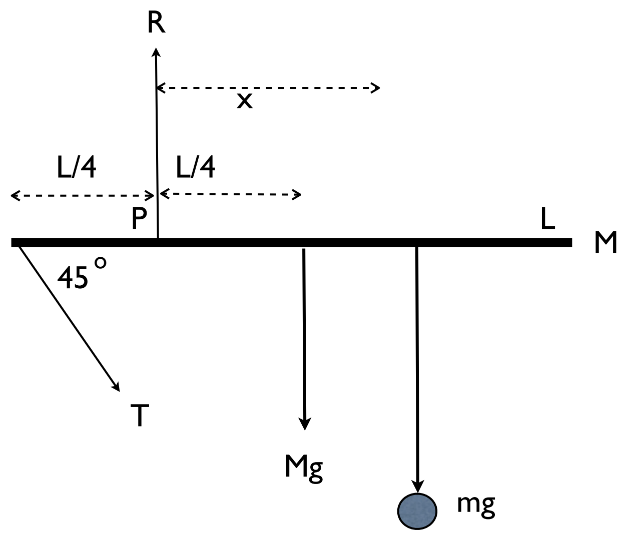
Pauta de control 1 de Sistemas Dinámicos

Profesores Hugo Arellano, Diego Mardones, Nicolás Mujica

26 de Mayo 2008

Solución Problema 1

a) El diagrama de cuerpo libre sería:



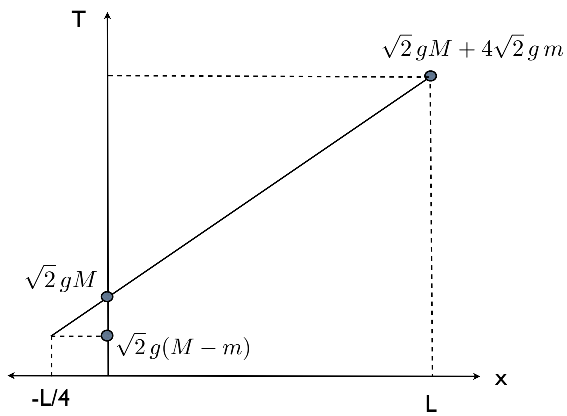
Imponemos $\sum \vec{\tau} = 0$ c/r al punto de apoyo de la viga ($\tau(\vec{R}) = 0$)

$$\Rightarrow \quad M\,g\,\frac{L}{4} + m\,g\,x - T\,\frac{L}{4}\sin\pi/4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad T\,\frac{L}{4}\sin\pi/4 = g\left(M\frac{L}{4} + m\,x\right)$$

$$T = 4\sqrt{2}g\left(\frac{M}{4} + \frac{m\,x}{L}\right)$$

b) Se tiene el siguiente esquema:



Solución Problema 2

Se tiene una polea **A** de radio interno r, radio externo R y momento de inercia c/r a su centro I_0, a la cual se le aplica una fuerza F sobre su radio externo y tira de una cuerda con tensión T en dirección opuesta sobre su radio interno. Por otro lado un bloque **B** de masa m descansa sobre una superficie horizontal rugoza y es tirado por la cuerda de tensión T.

DCL sobre bloque **B**:

$$N - mg = 0$$

$$T - \mu_k N = ma$$

Torque sobre polea **A** (c/r a su eje):

$$FR - Tr = I_0\alpha$$

Aceleración angular de la polea:

$$r\alpha = a$$

De las dos primeras ecuaciones

$$T = ma + \mu_k mg$$

Reemplazando todo en la tercera ecuación:

$$(ma + \mu_k mg)r + I_0 a/r = FR$$

de donde

$$a = \frac{FR - \mu_k mgr}{mr + I_0/r} = \frac{\frac{F}{m}\frac{R}{r} - \mu_k g}{1 + \frac{I_0}{mr^2}}$$

y finalmente reemplazando en la ecuación para la tensión:

$$T = \frac{mFR + \mu_k mgI_0/r}{mr + I_0/r} = \frac{F\frac{R}{r} + \mu_k g\frac{I_0}{r^2}}{1 + \frac{I_0}{mr^2}}$$

Solución Problema 3

a) La ubicación del centro de masas es:

$$R_{cm} = \frac{M\frac{L}{2} + \frac{M}{2}L}{M + \frac{M}{2}} = \frac{2}{3}L,$$

y el momento de inercia:

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + \left(\frac{1}{12}\frac{M}{2}\frac{L^2}{4} + \frac{M}{2}L^2\right) = \frac{27}{32}ML^2$$

b) Usando conservación de energía:

$$E_f = \frac{1}{2}I\omega^2 + M\,g\,y_{cm} = 0$$

resulta,

$$\omega^2 = \frac{2M\,g\,y}{I} = \frac{2(\frac{3M}{2})g(\frac{2}{3}L)}{\frac{27}{32}ML^2} = \frac{64}{27}\frac{g}{L}$$

$$\omega \simeq 1,5\sqrt{\frac{g}{L}}$$

Esto da el siguiente resultado para la velocidad del centro de masas:

$$V_{cm} = R_{cm}\,\omega = \left(\frac{2}{3}L\right)\sqrt{\frac{64}{27}\frac{g}{L}} \simeq 1,03\sqrt{gL} \sim \sqrt{gL}$$

c) En el punto más bajo del péndulo no hay torque neto c/r al eje, luego su aceleración angular (y por lo tanto tangencial) instantánea es cero y sólo se tiene aceleración centrípeta en dirección al punto P.

$$a_{cm} = \frac{v_{cm}^2}{R_{cm}} = \frac{gL}{\frac{2}{3}L} = \frac{3}{2}g \simeq 1,5\,g = 14,7\ [m/s^2]$$

Solución Problema 4

a) Del gráfico se obtiene : $A = 1.25 \pm 0.05\,[cm]$. El error sería acceptable también con ± 0.10, pero cuidado, deben ser 2 cifras significativas.

b) En el gráfico se observan 5 oscilaciones de 1 $\pm 0.1\,[s]$, por lo tanto,

$$T_0 = \frac{1 \pm 0.1}{5} = 0.20\ \pm 0.02\,[s]$$

$$\Rightarrow \quad f_0 = \frac{1}{T_0} \simeq \frac{1}{0.20} \pm \frac{1}{(0.20)^2} \cdot 0.02$$

$$f_0 \simeq 5\ \pm 0.5\,[Hz]$$

Por lo tanto, $\omega_0 = 31.415\ \pm 3.141\,[rad/s]$, o bien,

$$\omega_0 = 31\ \pm 3\,[rad/s]$$

c) De la relación para la frecuencia natural, se obtiene,

$$m = \frac{k}{\omega_0^2}$$

De lo anterior,

$$\omega_0^2 = 31 \cdot 31\ \pm 31 \cdot 31 \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{31}\right)^2 + \left(\frac{3}{31}\right)^2}$$

$$\rightarrow \quad \omega_0^2 = 961\ \pm 131\,[rad^2/s^2]$$

Esto deja una estimación de masa de:

$$m = \frac{98 \pm 1}{961 \pm 131} = \frac{98}{961} \pm \frac{98}{961}\sqrt{\left(\frac{1}{98}\right)^2 + \left(\frac{131}{961}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad m = 0.10\ \pm 0.01\,[Kg]$$

d) Del gráfico: $y(t=0) = A\cos\phi_0 = 0.76 \pm 0.10\,[cm]$

$$\Rightarrow \quad \cos\phi_0 = \frac{0.76 \pm 0.10}{1.25 \pm 0.05} = 0.61 \pm 0.08$$

Por lo tanto la constante de fase sería:

$$\phi_0 = \cos^{-1}(0.61 \pm 0.08) = 0.91 \pm 0.10$$

En grados: $\phi_0 = 52^\circ\ \pm 6^\circ$