

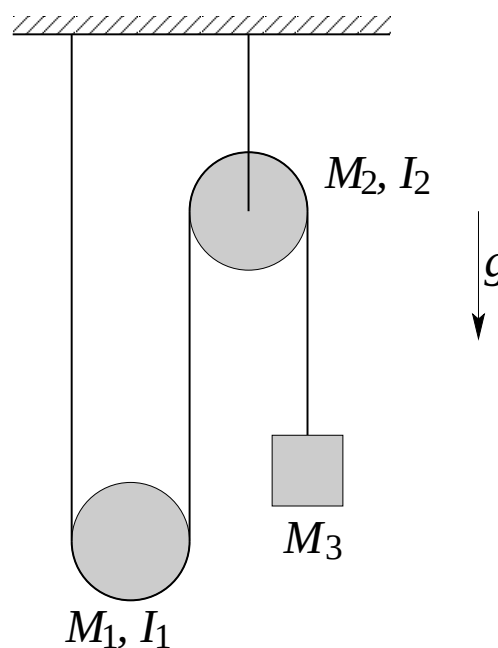
Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta es correcta cuando tanto el método como el resultado son correctos. Cualquier método de solución correcto es válido.

En este problema se busca modelar el funcionamiento de las poleas reales, es decir aquellas que tienen masa y momento de inercia.

La diferencia con las poleas ideales es que la tensión de la cuerda a ambos lados de la polea ya no es la misma. De esta forma, en cada trozo de una cuerda la tensión es uniforme, pero cambia cuando pasa por una polea.

Considere el sistema de la figura, donde una cuerda ideal que está unida al techo pasa por una polea móvil de masa M_1 y momento de inercia I_1 , luego por una polea de masa M_2 y momento de inercia I_2 que está fija al techo por otra cuerda ideal, y finalmente está unida un bloque de masa M_3 .

Calcule la aceleración del bloque y la tensión de la cuerda en cada uno de los trozos.



Solución:

Se va a utilizar un sistema de coordenadas tal que la dirección positiva de y va hacia abajo y la dirección positiva de giro es saliendo del papel (sentido antihorario).

Consideremos primero la cinemática de la polea "1". Cuando esta polea baja una distancia Δ , la cuerda se desenrolla la misma cantidad, de manera que la polea rota una cantidad Δ/R en sentido horario (es decir negativo). Derivando esta relación dos veces respecto al tiempo se encuentra:

$$\alpha_1 = -a_1/R$$

Veamos ahora la relación cinemática entre “1” y “2”. Cuando la “1” baja una distancia Δ , la cuerda avanza una distancia 2Δ . De esta forma, la polea “2” gira un ángulo $2\Delta/R$ en sentido antihorario (positivo). Luego,

$$\alpha_2 = 2a_1/R$$

Finalmente veamos la relación con la masa “3”. En este caso es más directo relacionarla con la polea “2”. Si la masa “3” baja una distancia Δ , entonces “2” gira un ángulo Δ/R en sentido horario (negativo). Se obtiene entonces,

$$\alpha_2 = -a_3/R$$

Estas últimas dos relaciones las podemos combinar para obtener

$$a_3 = -2a_1$$

quedando todas las cantidades cinemáticas en términos de a_1 .

Veamos ahora las fuerzas. Sobre la polea “1” actúan las tensiones T_1 y T_2 y su peso M_1g . Las ecuaciones de fuerza y torque son:

$$M_1 a_1 = M_1 g - T_1 - T_2$$

$$I_1 \alpha_1 = RT_2 - RT_1$$

Sobre la polea “2” actúan las tensiones T_2 , T_3 y T_4 y su peso M_2g . Las ecuaciones de fuerza y torque son:

$$0 = M_2 g + T_2 + T_3 - T_4$$

$$I_2 \alpha_2 = RT_2 - RT_3$$

donde se impuso que la polea no se traslada.

Por último sobre la masa “3” las fuerzas son la tensión T_3 y el peso M_3g . La ecuación de fuerza es:

$$M_3 a_3 = M_3 g - T_3$$

El sistema de ecuaciones que resulta se resuelve por los métodos estándares resultando que la aceleración del bloque es:

$$a_3 = \frac{2g(2M_3 - M_1)}{M_1 + 4M_3 + I_1/R^2 + 4I_2/R^2}$$

