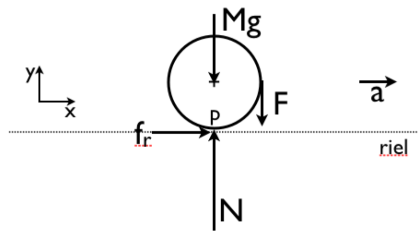
Solución Control 3, FI 1002, Primavera 2009

1. *a*) En el DCL de la figura, N representa la suma de las normales de ambos rieles y f_r la suma de las fuerzas de roce estáticas de ambos rieles, ambas sobre el punto de apoyo del cilindro en los rieles p. El peso del cilindro Mg se aplica sobre el centro de masa del cilindro, y la fuerza F es tangente al cilindro. a indica la dirección de la aceleración horizontal. Alternativamente se puede poner $2N$ y $2f_r$ en el DCL sin cambiar los resultados.



b) Sólo la fuerza F realiza torque c/r al punto de apoyo p. El *brazo* de F c/r a p es $R = r\sin\theta$ donde $r = \sqrt{2}R$ es la distancia entre el punto de apoyo p y la tangente al cilindro donde se aplica la fuerza F, y $\theta = \pi/4$ es el ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{F}$ (vertical). Luego la ecuación de torque c/r a p es:

$$RF = I_p\alpha = I_p\frac{a}{R} = (\frac{1}{2}MR^2 + MR^2)\frac{a}{R}$$

donde en la última igualdad usamos el teorema de los ejes paralelos para calcular el momento de inercia c/r al punto p. Luego despejamos

$$a = \frac{2F}{3M}$$

c) La segunda ley de Newton la escribimos a lo largo de ejes $\hat{x}$ horizontal hacia la derecha, e $\hat{y}$ vertical hacia arriba como

$$\hat{x}: \quad f_r = Ma \quad , \qquad \hat{y}: \quad N - Mg - F = 0$$

El caso límite se obtiene de imponer $f_r = \mu_e N$, que reemplazando en las dos ecuaciones anteriores

$$Ma = M\frac{2F}{3M} = \mu_e(Mg + F)$$

de donde despejamos

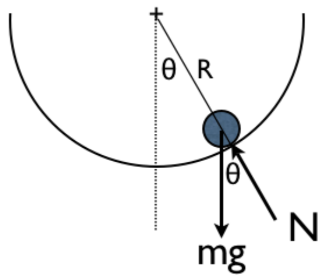
$$F = \frac{\mu_e Mg}{2/3 - \mu_e} = Mg$$

donde en la última igualdad reemplazamos $\mu_e = 1/3$.

2. La figura ilustra el DCL de la esferita de radio r, las únicas dos fuerzas sobre la esferita son el peso y la normal. Si calculamos el torque neto c/r al punto de contacto p entre la esferita r y el cilindro R obtenemos

$$rmg\sin(\pi - \theta) = I_p\alpha$$

donde el torque apunta hacia afuera del papel si la esferita está al lado derecho del punto más bajo del cilindro y hacia adentro del papel si la esferita está al lado izquierdo.



El momento de inercia de la esferita c/r a su centro de masa es $I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$ de donde obtenemos $I_p = \frac{7}{5}mr^2$ c/r a un punto sobre la superficie. La aceleración del centro de masa de la esferita es $a_{cm} = r\alpha$, donde α es la aceleración angular de la esferita en torno a su centro. Reemplazando I_p y a_{cm} en la ecuación anterior obtenemos la ecuación del movimiento

$$g \sin\theta = \frac{7}{5} a_{cm}$$

Ahora usamos el hecho que el centro de masa de la esferita se mueve en movimiento circular por el interior del cilindro (a una distancia $R - r$ del centro). Luego a_{cm} $(= r\alpha)$ representa también la aceleración tangencial: $a_{cm} = -(R-r)\ddot{\theta}$ donde los puntos representan derivadas con respecto al tiempo. Esta es la relación entre la rotación en torno al centro de la esfera y la rotación en torno al eje del cilindro que es necesario imponer para resolver el problema. Notar el signo negativo: si la esferita baja desde la posición de la figura entonces $\alpha > 0$ y $\ddot{\theta} < 0$; si la esferita está al lado izquierdo de la vertical entonces $\alpha < 0$ y $\ddot{\theta} > 0$.

Para pequeñas oscilaciones podemos usar $\sin\theta \sim \theta$, llegando a la ecuación

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R-r)}\theta = 0 \quad ,$$

que representa un movimiento armónico simple de frecuencia natural $\omega_0 = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}} = \frac{2\pi}{T}$; de donde obtenemos finalmente el período del movimiento como

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}} \ .$$

3. *a*) La posición horizontal del centro de M es $x(t)$. La posición horizontal de la bolita m es $x(t)+y(t)$, luego la posición del centro de masa del sistema es

$$x_{cm} = \frac{Mx(t) + mx(t) + my(t)}{M+m} = x(t) + \frac{m}{M+m}y(t)$$

Las fuerzas externas al carrito son debidas al resorte ($F_e = -kx$) y al roce viscoso ($F_r = -b\dot{x}$), luego la segunda ley de Newton la escribimos como

$$-kx(t) - b\dot{x} = (M+m)\ddot{x}_{cm} \quad .$$

Usando $\ddot{y} = -\omega^2 y(t)$ y reordenando

$$(M+m)\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -m\ddot{y} = mr\omega^2 \sin(\omega t)$$

b) Dividiendo la ecuación anterior por $M+m$ e identificando $\omega_0^2 = k/(M+m)$ y $1/\tau = b/(M+m)$ podemos reescribirla como

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{mr\omega^2}{M+m}\sin(\omega t)$$

La única dependencia de la solución propuesta $x(t) \equiv B(\omega)\sin(\omega t - \delta)$ en el tiempo está en el numerador luego obtenemos

$$\frac{1}{\tau}\dot{x} = \frac{\omega}{\tau}B(\omega)\cos(\omega t - \delta) \quad \text{y} \quad \ddot{x} = -\omega^2 x(t) = -\omega^2 B(\omega)\sin(\omega t - \delta)$$

luego

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = [-\omega^2 + \omega_0^2]B(\omega)\sin(\omega t - \delta) + \frac{\omega}{\tau}B(\omega)\cos(\omega t - \delta) \quad .$$

Usando $\sin(\omega t - \delta) = \sin(\omega t)\cos\delta + \sin(-\delta)\cos(\omega t)$, $\cos(\omega t - \delta) = \cos(\omega t)\cos\delta - \sin(\omega t)\sin(-\delta)$; reemplazando en la ecuación anterior y reagrupando:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \left[(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\delta + \frac{\omega}{\tau}\sin\delta\right]B(\omega)\sin(\omega t) + \left[\frac{\omega}{\tau}\cos\delta - (\omega_0^2 - \omega^2)\sin\delta\right]B(\omega)\cos(\omega t)$$

factorizando por $\cos\delta$ y reemplazando $\tan\delta = \frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$ se anula el término con $\cos(\omega t)$ y se obtiene

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{\omega^2}{\tau^2}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\right]\cos\delta B(\omega)\sin(\omega t)$$

A partir de al relación $\sin^2\delta + \cos^2\delta = 1$ obtenemos

$$\cos\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\delta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2/\tau^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}}$$

que al reemplazar arriba se obtiene finalmente:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}\right]\frac{B(\omega)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}}\sin(\omega t) = \frac{mr\omega^2}{M+m}\sin(\omega t)$$

es decir, efectivamente la función $x(t)$ propuesta es solución.

c) Expandiendo al interior de la raiz cuadrada en el denominador de $B(\omega)$ encontramos

$$\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} = \sqrt{\omega^4 + (1/\tau^2 - 2\omega_0^2)\omega^2 + \omega_0^4}$$

que identificando término a término con la expresión experimental resulta

$$\omega_0^4 = 16 \quad \text{y} \quad (1/\tau^2 - 2\omega_0^2) = -7 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 2 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \tau = 1 \text{ s}$$

La amplitud $B(\omega)$ es máxima cuando $\omega_{max}^2 = \omega_0^2 - 2(\frac{1}{2\tau})^2$ de donde $\omega_{max} = \sqrt{3{,}5} \sim 1{,}9 \sim \omega_0$. Altenativamente imponiendo $\frac{dB(u)}{du} = 0$ con $u = \omega^2$ se obtiene $u_{max} = 32/7 \sim 4{,}6$ de donde $\omega_{max} \sim 2{,}1 \sim \omega_0$.