



CI63F/EL761

Control Inteligente para Problemas Dinámicos de Transporte

Profesores II-2009:

Cristián Cortés*, Doris Sáez**

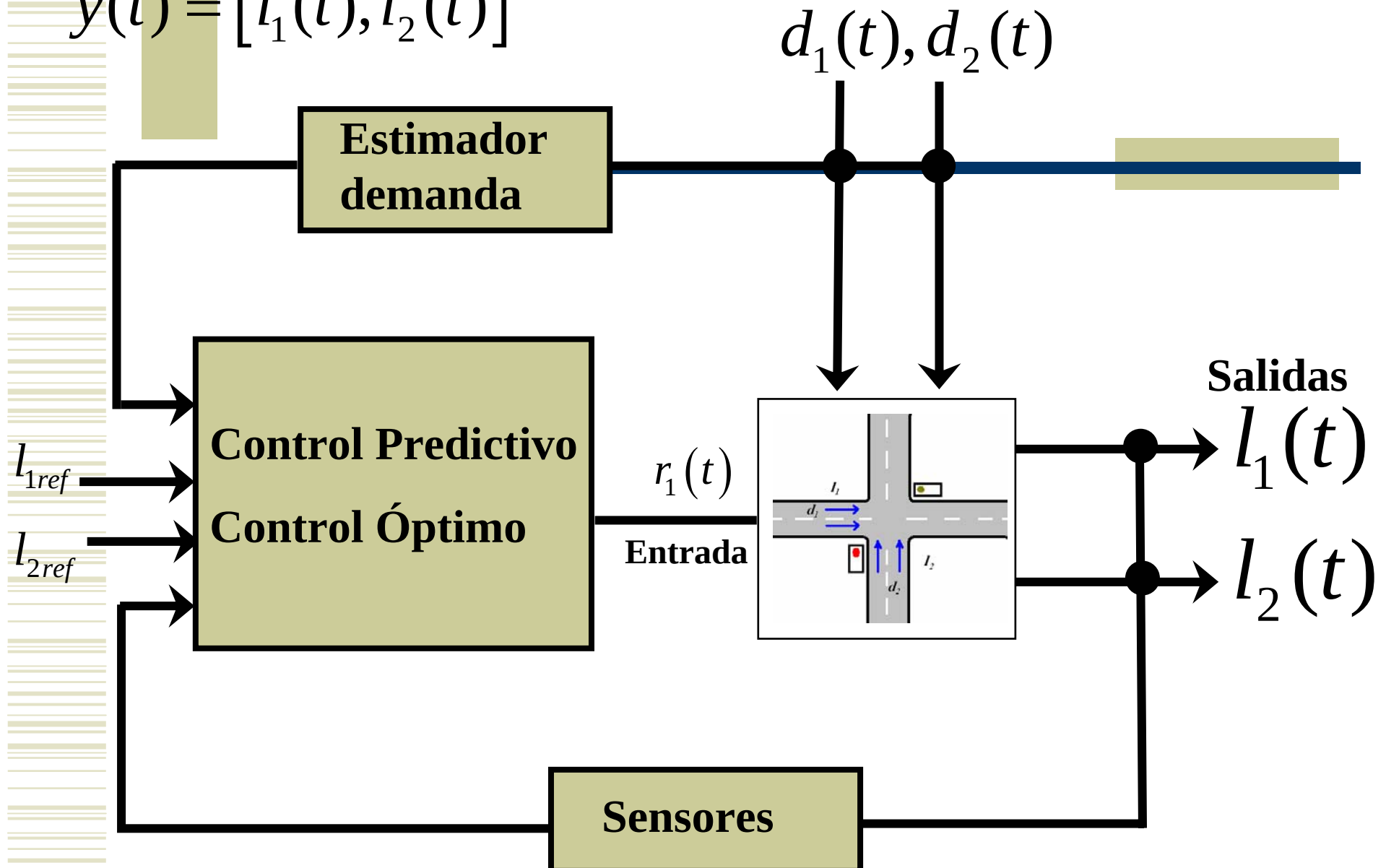
Departamento de Ingeniería Civil - Transporte

*Departamento de Ingeniería Eléctrica

Universidad de Chile

Esquema de control avanzado:

$$y(t) = [l_1(t), l_2(t)]$$



Modelación en variables de estado

- ◆ Variables de estado: Representan a las variables que caracterizan de manera única a un sistema o proceso. $x \in R^n$
- ◆ Variables de control o variables manipuladas: Son las variables sobre las cuales podemos decidir y afectar al sistema. $u \in R^r$
- ◆ Variables de salida: Variables que se miden. $y \in R^m$

Modelación en variables de estado

- ♦ Ecuación de estado. Caracteriza al proceso.

$$\dot{x} = f(x, u, t) \qquad x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$$

- ♦ Ecuación de salida. Caracteriza a las variables que se miden del proceso.

$$y = g(x, u, t) \qquad y(k) = g(x(k), u(k), k)$$

Modelación en variables de estado

- ♦ Caso Lineal, invariante, tiempo continuo.

$$(SL) \begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$x_0 \in R^n, A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times r}$$

$$C \in R^{m \times n}, D \in R^{m \times r}$$

Modelación en variables de estado

- ◆ Dado $u(t)$ (estrategia de control).

$$x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)} x_0}_{\text{Respuesta a entrada cero (Solución homogénea)}} + \underbrace{e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau}_{\text{Respuesta a estado cero (Solución particular)}}$$

$$y(t) = C e^{A(t-t_0)} x_0 + C e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau + D u$$

Modelación en variables de estado

♦ Controlabilidad.

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{♦ Este sistema es controlable si existe} \\ \text{u(t) tal que } x(T)=x_T \text{ dado.} \end{array}$$



♦ Criterio de Kalman:

La matriz de controlabilidad $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ tiene rango n

Modelación en variables de estado

♦ Observabilidad.

$$\begin{cases} x' = Ax \\ y = Cx \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

♦ Este sistema es observable si conocido $y(t)$ y $u(t)$ en $[0, T]$, es posible recuperar la condición inicial $x(0) = x_0$ dado.



♦ Criterio de Kalman:

La matriz de observabilidad

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

tiene rango n

Modelación en variables de estado

♦ Observabilidad.

$$y(t) = Ce^{At}x_0$$

$$e^{A^*t}C^*y(t) = e^{A^*t}C^*Ce^{At}x_0 / \int_0^T$$

$$\int_0^T e^{A^*t}C^*y(t)dt = \underbrace{\left(\int_0^T e^{A^*t}C^*Ce^{At} \right)}_{\tilde{w}_T} x_0$$

Si $\tilde{w}_T$ es definida positiva $\Rightarrow$ El sistema es observable

$$x_0 = \underbrace{\left(\int_0^T e^{A^*t}C^*Ce^{At} \right)^{-1}}_{\tilde{w}_T^{-1}} \int_0^T e^{A^*t}C^*y(t)dt \leftarrow \text{Para calcular } x_0$$

Modelación en variables de estado

- ♦ Dualidad Controlabilidad - Observabilidad.

$$(S1) \begin{cases} x' = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad (S2) \begin{cases} z' = A^* z + C^* u \end{cases}$$

(S1) es observable si (S2) es controlable

Control en variables de estado

- ♦ Caso Lineal, invariante, tiempo continuo.

Teorema de Localización de polos:

Si (A,B) controlable, existe K tal que el control $u(t)=-Kx(t)$ ubica los polos del sistema en lazo cerrado en los requerimientos.

$$(SL) \begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \Rightarrow u = -Kx \Rightarrow x' = (A - BK)x$$

Dado un conjunto de valores propios,
el espectro de $(A - BK)$ se puede ubicar

en ese o en cualquier conjunto de valores propios.

Control en variables de estado

Ajustando K , se hace que los vp de $(A - BK)$ queden estables y cumpliendo requerimientos de diseño (ts, mov, etc...)

- ◆ Caso no lineal, invariante, tiempo continuo.

$$(SNL) \begin{cases} x' = f(x, u) \\ y = g(x, u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{si } u = -Kx \Rightarrow x' = f(x, -Kx)$$

¿Qué ocurre con SNL en
lazo cerrado?, ¿es posible
controlarlo?

Control en variables de estado

◆ Principio de linealización

$$(SNL) \begin{cases} x' = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases}$$

$$(L) \begin{cases} x' = \underbrace{\left[\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right]_{(\bar{x}, \bar{u})}}_A \cdot x + \underbrace{\left[\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right]_{(\bar{x}, \bar{u})}}_B \cdot u \\ y = \underbrace{\left[\frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \right]_{(\bar{x}, \bar{u})}}_C \cdot x + \underbrace{\left[\frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \right]_{(\bar{x}, \bar{u})}}_D \cdot u \end{cases}$$

Dada una trayectoria $(\bar{x}, \bar{u})$ de (SNL), si el sistema linealizado (L) en torno de la trayectoria $(\bar{x}, \bar{u})$ es controlable

$\Rightarrow$

el sistema no lineal es localmente controlable.

Control Óptimo

- ♦ En control óptimo se busca resolver problemas del tipo:

$$\underset{u(t), x(t)}{\text{Min}} \quad r(x(T)) + \int_{t_0}^T L(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \longrightarrow \text{Función Objetivo}$$

$$\text{s.a.} \quad x' = f(t, x(t), u(t)) \longrightarrow \text{EDO dinámica}$$

$$x(t_0) = x_0 \longrightarrow \text{Condición inicial}$$

$$x(T) \in \Omega \longrightarrow \text{Condición terminal}$$

$$u(t) \in U \longrightarrow \text{Restricción en las variables de control} \\ \text{(Se debe aplicar solo controles factibles)}$$

Control Óptimo

$$\underset{u(t), x(t)}{\text{Min}} \quad r(x(T)) + \int_{t_0}^T L(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau$$

$$s.a. \quad x' = f(t, x(t), u(t))$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(T) \in \Omega$$

$$u(t) \in U$$

- ♦ Si $r=0$ se llama Problema de Lagrange
- ♦ Si $L=0$ se llama Problema de Meyer
- ♦ Si ambas funciones son distintas de cero, se llama Problema de Bolza

Control Óptimo

- ◆ Principio del mínimo de Pontryagin:

Se define el hamiltoniano:

$$H(t, x, \lambda, u) = f(t, x(t), u(t)) \cdot \lambda - L(t, x(t), u(t))$$

- ◆ Sea u^* control óptimo, x^* trayectoria optima asociada al control óptimo. Entonces:

$\exists \lambda^*$ tal que:

$$x'^* = \nabla_{\lambda} H(t, x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) \longrightarrow \text{EDO}$$

$$\lambda'^* = -\nabla_x H(t, x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) \longrightarrow \text{Ecuación adjunta}$$

$$H(t, x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) = \min_{a \in U} H(t, x^*(t), \lambda^*(t), a) \longrightarrow \text{Principio del mínimo}$$