"EL650 - Ejercicio N° 3"

Auxiliar: Magdalena von Borries S.
(mvonborr@ing.uchile.cl)

Profesor: Marcos Orchard

Octubre 2009

Problema 1

Resuelva el problema de consumo mínimo de combustible, en el que el objetivo es lograr que un móvil (partícula de masa 1[Kg]) llegue al origen del marco de referencia con velocidad nula y en un tiempo T dado, minimizando $J = \int_0^T |u(t)|dt$.

Las condiciones iniciales de la partícula (posición y velocidad) son conocidas y no existe restricción en la cantidad instantánea de combustible $u(t)$ que se utiliza. ¿En que casos el problema no tiene solución?

Hint: Resuelva primero el problema asumiendo $|u(t)| \leq \gamma$ y luego vea que sucede si $\gamma \to \infty$.

Solución

Se entregaron los siguientes puntajes, "puntajes aproximados":

- Sistema, diagrama de fase y/o otros comentarios: 0,5 ptos.
- Planteamiento problema de Optimización: 0,5 ptos.
- Hamiltoniano: 0,5 ptos.
- Análisis de los casos: 2 ptos. (Depende de p_2, pero el análisis también incluye que el control aplicado u(t) depende de las Condiciones iniciales, T, γ. Comentarios.)
- Tiempo que se demora en realizar el control: $0,5$ ptos (basta con ejemplificar un caso. ¿Existe un T para el cual no se logra el objetivo?: T muy pequeño)
- Y lo que se quiere minimizar "combustible utilizado": $0,5$ ptos (basta con ejemplificar un caso)
- Lo que sucede cuando $\gamma \to \infty$: 1 pto

Dada la ley de Newton $m\ddot{y} = u \Rightarrow \ddot{y} = u$. Para escribir el sistema en variables de estado, sea $x_1 = y$ y $x_2 = \dot{y}$ entonces las ecuaciones de estado son:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = f(x, u) \tag{1}$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{2}$$

$$\dot{x}_2 = u \tag{3}$$

Las condiciones iniciales están dadas $x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}$
Diagrama de Fase similar al sistema en el Ejercicio N°1.

- $u = \gamma > 0$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}gt^2 + x_{2,0}t + x_{1,0}$$
$$x_2(t) = gt + x_{2,0}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2g}x_1(t) - \frac{1}{2g}x_{2,0}^2 + x_{1,0} \\ &= \frac{1}{2g}x_2(t) + \text{algo que depende de las condiciones iniciales} \end{aligned}$$

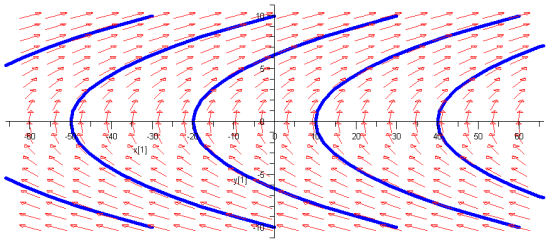


Figura 1: $\gamma = 1$

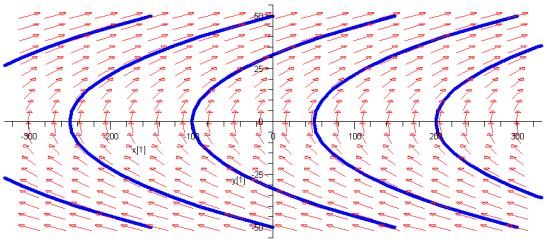


Figura 2: $\gamma = 5$, fijarse en la escala

- $u = -\gamma < 0$

$$x_1(t) = \frac{-1}{2}gt^2 + x_{2,0}t + x_{1,0}$$
$$x_2(t) = -gt + x_{2,0}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{-1}{2g}x_1(t) + \frac{1}{2g}x_{2,0}^2 + x_{1,0} \\ &= \frac{-1}{2g}x_2(t) + \text{algo que depende de las condiciones iniciales} \end{aligned}$$

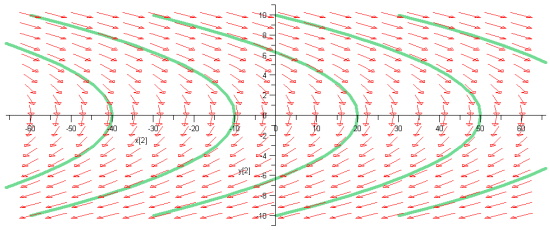


Figura 3: $\gamma = 1$

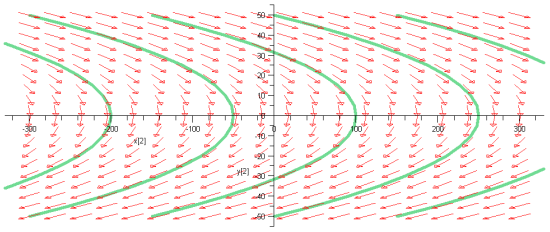


Figura 4: $\gamma = 5$, fijarse en la escala

- $u = \gamma = 0$

$$x_1(t) = x_{2,0}t + x_{1,0}$$
$$x_2(t) = x_{2,0}$$

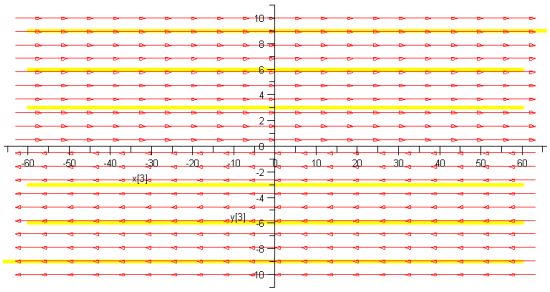


Figura 5: $\gamma = 0$

El problema de control óptimo se basa en:

* $\text{mín}_u J(u) \Rightarrow$ si u es óptimo entonces $\frac{\partial J}{\partial u}(u) = 0$ Condición para ser óptimo
* Ecuación de estado: $\dot{x} = f(x, u)$
* Función de costo: $J(u) = \int_0^T L(x, u)\, dt + \varphi(x(T))$
* Condiciones para la optimización
  - Ecuación estacionaria: u óptimo $\Rightarrow p^T \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \ \forall t$
  - Ecuación del coestado: $\dot{p} = -\frac{\partial f}{\partial x}^T p - \partial L \partial x^T$, $p(T) = \partial \varphi \partial x(x(T))$

Minimum Fuel Problem

Tiempo que debe demorarse el móvil en llegar a $y(T) = 0$ y $\dot{y}(T) = 0$: T está dado (conocido).

Función de Costo (combustible utilizado $u(t)$, además no existe restricción en la cantidad instantánea de combustible $u(t)$ que se utiliza):

$$J = \int_0^T |u(t)|\, dt \Rightarrow L(x, u) = |u|$$

Problema de Optimización:

$$\text{mín} \int_0^T |u(t)|\, dt \quad \Rightarrow L(x, u) = |u|$$

$s.a.$:

$$x(T) = \begin{bmatrix} y(T) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$u(t)$ no tiene cota

- Problema de minimización

$$H(x,u,p) = \frac{\partial J}{\partial u}(u) = p^T \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial L}{\partial u}$$

entonces:

$$H(x,u,p) = p^T[Ax+Bu] + |u| = p^T Ax + p^T Bu + |u| = p^T Ax + \underset{(*)}{p_2 u} + |u|$$

(*) Depende de u: tiene que ser minimizado

Con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p^T Bu = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = p_2 u \qquad \Rightarrow p_2 u + |u|$$

Ecuación del Coestado:

$$\dot{p} = \frac{\partial f^T}{\partial x} p - \frac{\partial L^T}{\partial x} \quad \Rightarrow \left\{ \dot{p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} p \right\}$$

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} p \Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_1 = 0 \\ \dot{p}_2 = -p_1 \end{cases} \tag{4}$$

Consideremos el caso $|u(t)| \leq \gamma$, γ un número grande

- Entonces: tenemos que minimizar $p_2 u + |u|$ sujeto a $|u(t)| \leq \gamma$
  BANG-OFF-BANG CONTROL (A lo más son dos cambios en u, y no hay cambio de vuelta: $-\gamma \Rightarrow 0 \Rightarrow -\gamma$ no es posible, porque p_2 es una línea. Además tampoco puede terminar en $u = 0$, ya que esto no lleva el sistema al origen, es decir al móvil a la posición final cero y velocidad final cero).
  - (I) $p_2 < 1 \Rightarrow u = \gamma$
  - (II) $|p_2| \leq 1 \Rightarrow u = 0$
  - (III) $p_2 > 1 \Rightarrow u = -\gamma$
- Gráficos que reflejan las condiciones anteriores:

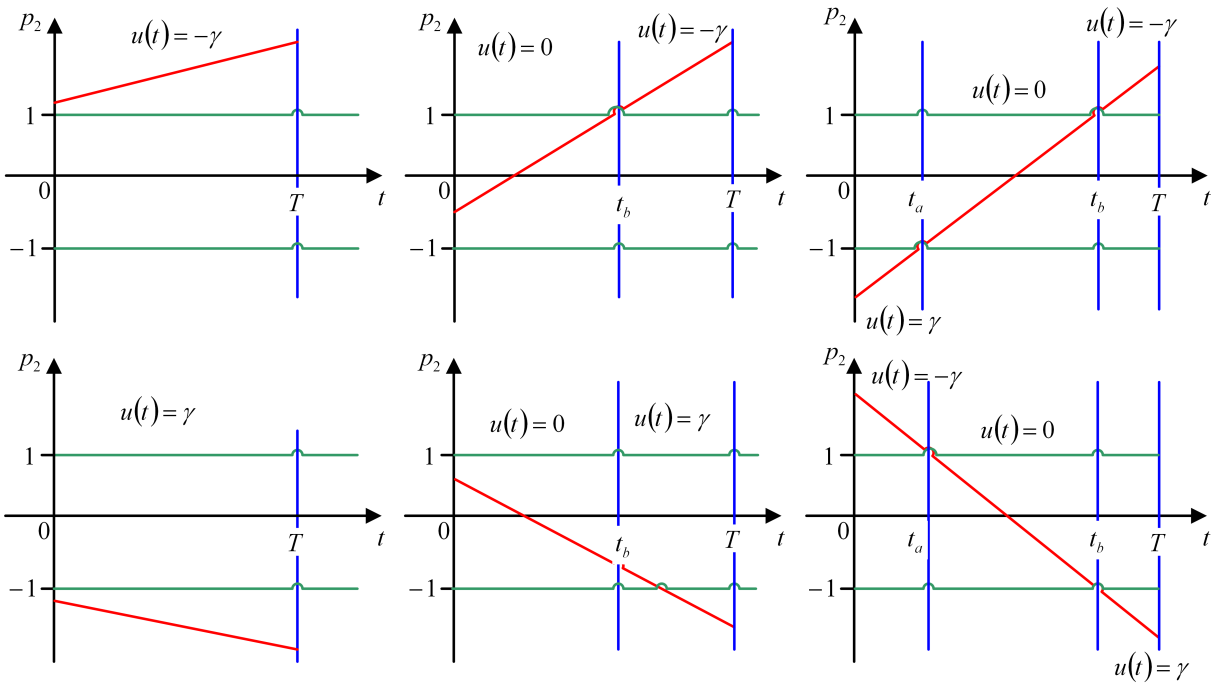


Figura 6: Posibilidades de realizar el control deseado

Las posibles cambios en el control que satisfacen las condiciones son:

$$u(t) = \begin{cases} \gamma & \text{comparar con problema de control en tiempo mínimo} \\ -\gamma & \text{comparar con problema de control en tiempo mínimo} \\ 0,\gamma & \\ 0,-\gamma & \\ -\gamma,\gamma & \text{duda... comparar con problema de control en tiempo mínimo} \\ \gamma,-\gamma & \text{duda... comparar con problema de control en tiempo mínimo} \\ -\gamma,0,\gamma & \\ \gamma,0,\gamma & \end{cases}$$

(por favor revisar las dudas)

- Notar la diferencia: mínimo tiempo - tiempo dado T: Se puede ver gráficamente en el diagrama de fase.
- Para encontrar el instante en el cual se debe cambiar el control. Se mostrarán ejemplos:
- Caso $u = \gamma, 0, -\gamma$: Acelera, velocidad constante, Desacelera.
  Fijarse en el gráfico dónde debe estar $x_{1,0}$ y $x_{2,0}$ para que sea necesario aplicar primero $u = \gamma$, análogo para el otro caso.
  Entonces:
  - Para $t \in [0, t_a]$ se debe cumplir que

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2 + x_{2,0}t + x_{1,0}$$
$$x_2(t) = \gamma t + x_{2,0}$$

Y en $t = t_a$ se tiene

$$x_1(t_a) = \frac{1}{2}\gamma t_a^2 + x_{2,0}t_a + x_{1,0}$$
$$x_2(t_a) = \gamma t_a + x_{2,0}$$

- Para $t \in [t_a, t_b]$ se debe cumplir que (notar que hay que desfasar el sistema)

$$x_1(t) = x_2(t_a)(t - t_a) + x_1(t_a)$$
$$x_2(t) = x_2(t_a)$$

Y en $t = t_b$ se tiene

$$x_1(t_b) = x_2(t_a)(t_b - t_a) + x_1(t_a)$$
$$x_2(t_b) = x_2(t_a)$$

La idea es reemplazar los valores anteriores ($x_1(t_a)$ y $x_2(t_a)$).

- Para $t \in [t_b, T]$ se debe cumplir que

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}\gamma(t - t_b)^2 + x_2(t_b)(t - t_b) + x_1(t_b)$$
$$x_2(t) = -\gamma(t - t_b) + x_2(t_b)$$

Y en $t = T$ se tiene

$$x_1(T) = -\frac{1}{2}\gamma(T - t_b)^2 + x_2(t_b)(T - t_b) + x_1(t_b) = 0$$
$$x_2(T) = -\gamma(T - t_b) + x_2(t_b) = 0$$

Reemplazando los valores anteriores ($x_1(t_b)$ y $x_2(t_b)$) y los anteriores a estos ($x_1(t_a)$ y $x_2(t_a)$).

$$x_1(T) = -\frac{1}{2}\gamma(T - t_b)^2 + (\gamma t_a + x_{2,0})(T - t_b) + (\gamma t_a + x_{2,0}) * (t_b - t_a) + \frac{1}{2}\gamma t_a^2 + x_{2,0}t_a + x_{1,0} = 0$$
$$x_2(T) = -\gamma(T - t_b) + \gamma t_a + x_{2,0} = 0$$

Como se ve reemplazando los valores correspondientes, se obtienen a partir de estas dos últimas ecuaciones: dos ecuaciones y dos incógnitas (t_a y t_b). Despejando se obtiene:

$$t_a = (T - t_b) - \frac{x_{2,0}}{\gamma} \tag{5}$$
$$t_b = \frac{1}{2\gamma}(\gamma T - x_{2,0} \pm \sqrt{(\gamma^2 T^2 + 2x_{2,0}T\gamma - x_{2,0}^2 + 4x_{1,0}\gamma)}) \tag{6}$$

(Reemplazar t_b en t_a)
Después de un poco de análisis se pude deducir que (de todos modos revisar)

$$t_b = \frac{1}{2\gamma}(\gamma T - x_{2,0} + \sqrt{(\gamma^2 T^2 + 2x_{2,0}T\gamma - x_{2,0}^2 + 4x_{1,0}\gamma)})$$

Notar que si T es muy pequeño $\Rightarrow$ no hay solución al problema.

Ahora definiremos: $\Delta t_1 = t_a$, $\Delta t_2 = t_b - t_a$ y $\Delta t_3 = T - t_b$
Tiempo en el cual el vehículo utiliza combustible: cuando acelera y desacelera. Entonces el combustible utilizado está dado por

$$\int_0^T |u(t)|\,dt = \int_0^{t_a} |\gamma|\,dt + \int_{t_b}^T |-\gamma|\,dt = \gamma\left[\Delta t_1 + \Delta t_3\right]$$

(reemplazar valores...)

- En el caso anterior, pero cuando $x_{2,0} = 0$.Se puede ver que hay simplificaciones, debido a que se cumple que $\Delta t_1 = \Delta t_3$.

$$t_b = \frac{1}{2\gamma}(\gamma T + \sqrt{(\gamma^2 T^2 + 4x_{1,0}\gamma)})$$

$$t_a = \frac{1}{2\gamma}(\gamma T - \sqrt{(\gamma^2 T^2 + 4x_{1,0}\gamma)})$$

Observar que si T muy pequeño no se puede llegar al origen a tiempo (T debe ser menor que un T_{min} entregado por el problema de optimización de llegar al origen en el menor tiempo posible).
En este caso es más fácil ver lo que sucede cuando $\gamma \to \infty$, como se verá más adelante.
Cantidad de combustible consumido:

$$\int_0^T |u(t)|\,dt = 2\gamma t_a = \gamma T - \sqrt{\gamma^2 T^2 - 4\gamma}$$

- Si se relaja la condición sobre u (no es acotada), para un tiempo dado T
Entonces $p_2 u + |u|$ es minimizado si $u = -\infty$ cuando $p_2 > 1$ (por ejemplo)
Es decir: *No hay solución implementable para el problema de optimización*

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = 0 \\ \dot{p}_2 = -p_1 \end{cases} \Rightarrow p^T(Ax + Bu) + |u| \Rightarrow p^T Bu + |u| \text{ tiene que ser minimizado} \quad (7)$$

$$\Rightarrow p_2 u + |u| \begin{cases} -1 < p_2 < 1, & u = 0 \\ p_2 < -1, & u \to \infty \\ p_2 > 1, & u \to -\infty \end{cases} \quad (8)$$

Ejemplo en el cual $x_{2,0} = 0$: $t_a = T - t_b$

$$t_a = \frac{1}{2\gamma}(\gamma T - \sqrt{(\gamma^2 T^2 + 4x_{1,0}\gamma)})$$

  - Si T *es muy pequeña* $\Rightarrow$ *no hay solución al problema*
  - Cantidad de combustible consumido:

$$\int_0^T |u(t)|\,dt = 2\gamma t_1 = \gamma T - \sqrt{\gamma^2 T^2 - 4\gamma}$$

- ¿Qué sucede si $\gamma \to \infty$?

$$2\gamma t_1 = \left(\gamma T - \sqrt{\gamma^2 T^2 - 4\gamma}\right) \frac{\left(\gamma T + \sqrt{\gamma^2 T^2 - 4\gamma}\right)}{\left(\gamma T + \sqrt{\gamma^2 T^2 - 4\gamma}\right)} = \frac{4\gamma}{\gamma T + \sqrt{\gamma^2 T^2 - 4\gamma}}$$

$$2\gamma t_1 = \frac{4\gamma}{\gamma T + \sqrt{\gamma^2 T^2 - 4\gamma}} \overset{\gamma \to \infty}{\to} \frac{2}{T}$$

No hay solución implementable para este problema de optimización (control óptimo).

Como referencia: Problema de tiempo mínimo: $\text{mín}\{T/\ x(T) = 0\}$

$J = T$, restricción $|u(t)| \leq \gamma$

$$J = \int_0^T L(x,u)\, dt = T, \qquad \text{Sujeto a: } x(T) = 0$$

$$\Rightarrow L(x,u) = 1, \quad |u(t)| \leq \gamma$$

$$\dot{p} = \frac{\partial f^T}{\partial x} p - \frac{\partial L^T}{\partial x} \quad \Rightarrow \left\{ \dot{p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} p \right\}$$

- En resumen

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad L(x,u) = 1 \tag{9}$$

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} p \tag{10}$$

$$H(x,u,p) = p^T f(x,u) + L(x,u) = p^T [Ax + Bu] + 1$$

Con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H(x,u,p) = p^T Ax + p^T Bu + 1$$

- El control óptimo minimizará $p^T Bu$ (Principio del máximo de Pontryagin). Sea $p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$.

  Sabemos que $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

  Por lo tanto

$$p^T Bu = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = p_2 u \qquad |u(t)| \leq 1$$

  BANG-BANG CONTROL:

  - Si $p_2(t) > 0 \Rightarrow u(t) = -\gamma$
  - Si $p_2(t) < 0 \Rightarrow u(t) = \gamma$

- Pero:

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

  Es decir $\dot{p}_1 = 0$ y $\dot{p}_2 = -p_1$

  - $p_1(t)$ es una constante
  - $p_2(t)$ es una línea

  Es decir el control cambiará a lo más una vez: la idea es incorporár gráficos...

- Volvamos a las ecuaciones de estado

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{12}$$

$$\dot{x}_2 = u \tag{13}$$

$\boxed{u = \gamma}$:

$$\dot{x}_2 = 1 \qquad \Rightarrow x_2(t) = \gamma t + x_{2,0} \dot{x}_1 \quad = x_2 \qquad \Rightarrow x_1(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2 + x_{2,0} t + x_{1,0} \tag{14}$$

Despejando ($x_1(t)$ solamente en función de $x_2(t)$ para el diagrama de fase)...

$\boxed{u = -\gamma}$:

$$\dot{x}_2 = -1 \qquad \Rightarrow x_2(t) = -\gamma t + x_{2,0} \dot{x}_1 \quad = x_2 \qquad \Rightarrow x_1(t) = -\frac{1}{2}\gamma t^2 + x_{2,0} t + x_{1,0} \tag{15}$$

Despejando ($x_1(t)$ solamente en función de $x_2(t)$ para el diagrama de fase):

- Para el control: hay que cambiar la entrada (de γ a $-\gamma$ o viceversa) cuando $x_1 = \frac{1}{2\gamma} x_2$ o $x_1 = -\frac{1}{2\gamma} x_2$.

  Acciones de control son básicamente:

$$u(t) = \begin{cases} \gamma & \text{comparar con problema de control en tiempo mínimo} \\ -\gamma & \text{comparar con problema de control en tiempo mínimo} \\ -\gamma, \gamma & \text{comparar con problema de control en tiempo mínimo} \\ \gamma, -\gamma & \text{comparar con problema de control en tiempo mínimo} \end{cases}$$

Problema 2

Considere un proceso que puede aproximarse por el siguiente modelo de tiempo discreto:

$$y(t) = 0{,}7y(t-1) + 0{,}2y(t-2) + u(t-1) - 0{,}5u(t-2) + \frac{e(t)}{\Delta} \tag{16}$$

con $e(t)$ ruido blanco. Se pide:

(a) Determinar las predicciones óptimas $\hat{y}(t+1)$, $\hat{y}(t+2)$, $\hat{y}(t+3)$ ocupando la ecuación diofántica. Compare sus resultados de predicción, simulando la evolución del modelo en el tiempo.

(b) Determinar explícitamente $u(t)$ de forma que se minimice $J = \hat{y}(t+1)^2 + \lambda \Delta u(t)^2$ (Controlador de Varianza Minima)

(c) Determinar la estabilidad del sistema a partir de la ecuación característica del lazo cerrado. ¿Existe un rango de valores de λ para el cual el sistema controlado es estable?.

(d) Suponga ahora que la variable manipulada está restringida a tomar los valores enteros $u_{min} = 0$ y $u_{max} = 1$ y la variable controlada tiene que ser menor que y_{max}. Plantee el problema de optimización y resuélvalo analíticamente.

Solución

(a) Determinar las predicciones óptimas $\hat{y}(t+1)$, $\hat{y}(t+2)$, $\hat{y}(t+3)$ ocupando la ecuación diofántica. Compare sus resultados de predicción, simulando la evolución del modelo en el tiempo.

Idea General:

En general, dado $A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-d) + \frac{e(t)}{\Delta}$

$$1 = E_j A\Delta + z^{-j}F_j \qquad \text{Ecuación Diofántica} \tag{17}$$

Luego: $\hat{y}(t+j) = BE_j\Delta u(t-d+j) + F_j y(t)$
Con $G_j = BE_j$, entonces

$$\hat{y}(t+j) = G_j\Delta u(t-d+j) + F_j y(t) \tag{18}$$

Escribiendo la ecuación de la forma conveniente

$$y(t) = 0{,}7y(t-1) + 0{,}2y(t-2) + u(t-1) - 0{,}5u(t-2) + \frac{e(t)}{\Delta}$$

$$\left(1 - 0{,}7z^{-1} - 0{,}2z^{-2}\right) y(t) = \left(1 - 0{,}5z^{-1}\right) u(t-1) + \frac{e(t)}{\Delta} \tag{19}$$

Relación con el caso general:

$$A(z^{-1}) = 1 - 0{,}7z^{-1} - 0{,}2z^{-2}$$

$$B(z^{-1}) = 1 - 0{,}5z^{-1}$$

$$d = 1$$

Para j=1

La ecuación diofántica queda $1 = E_1 A\Delta + z^{-1}F_1$, donde: $E_1 = 1$ y $F_1 = f_{10} + f_{11}z^{-1} + f_{12}z^{-2}$:
Reemplazando en la ecuación diofántica

$$1 = E_1 A\Delta + z^{-1}F_1 = 1\left(1 - 0{,}7z^{-1} - 0{,}2z^{-2}\right)\left(1 - z^{-1}\right) + z^{-1}\left(f_{10} + f_{11}z^{-1} + f_{12}z^{-2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow 1 &= 1 - 0{,}7z^{-1} - 0{,}2z^{-2} - 1z^{-1} + 0{,}7z^{-2} + 0{,}2z^{-3} + f_{10}z^{-1} + f_{11}z^{-2} + f_{12}z^{-3} \\
\Leftrightarrow 1 &= 1 - 1{,}7z^{-1} + 0{,}5z^{-2} + 0{,}2z^{-3} + f_{10}z^{-1} + f_{11}z^{-2} + f_{12}z^{-3} \\
\Leftrightarrow 1 &= 1 + (f_{10} - 1{,}7)z^{-1} + (f_{11} + 0{,}5)z^{-2} + (f_{12} + 0{,}2)z^{-3}
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes

$$\begin{aligned}
0 &= f_{10} - 1{,}7 \qquad &\Rightarrow f_{10} &= 1{,}7 \\
0 &= f_{11} + 0{,}5 \qquad &\Rightarrow f_{11} &= -0{,}5 \\
0 &= f_{12} + 0{,}2 \qquad &\Rightarrow f_{12} &= -0{,}2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{y}(t+1) &= BE_1\Delta u(t-1+1) + F_1 y(t) \\
&= \left(1 - 0{,}5z^{-1}\right)\Delta u(t) + \left(1{,}7 - 0{,}5z^{-1} - 0{,}2z^{-2}\right) y(t) \\
&= (u(t) - u(t-1)) - 0{,}5\,(u(t-1) - u(t-2)) + \left(1{,}7 - 0{,}5z^{-1} - 0{,}2z^{-2}\right) y(t) \\
&= u(t) - 1{,}5u(t-1) + 0{,}5u(t-2) + 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2)
\end{aligned}$$

Para j=2

La ecuación diofántica queda $1 = E_2 A\Delta + z^{-2}F_2$
Donde: $E_2 = 1 + e_{21}z^{-1}$ y $F_2 = f_{20} + f_{21}z^{-1} + f_{22}z^{-2}$:
Reemplazando en la ecuación diofántica

$$\begin{aligned}
1 &= E_2 A\Delta + z^{-2}F_2 \\
&= \left(1 + e_{21}z^{-1}\right)\left(1 - 0{,}7z^{-1} - 0{,}2z^{-2}\right)\left(1 - z^{-1}\right) + z^{-2}\left(f_{20} + f_{21}z^{-1} + f_{22}z^{-2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow 1 &= \left(1 + e_{21}z^{-1}\right)\left(1 - 0{,}7z^{-1} - 0{,}2z^{-2}\right)\left(1 - z^{-1}\right) + f_{20}z^{-2} + f_{21}z^{-3} + f_{22}z^{-4} \\
\Leftrightarrow 1 &= 1 - 1{,}7z^{-1} + 0{,}5z^{-2} + 0{,}2z^{-3} + e_{21}z^{-1} - 1{,}7e_{21}z^{-2} + 0{,}5e_{21}z^{-3} + 0{,}2e_{21}z^{-4} \\
&\quad + f_{20}z^{-2} + f_{21}z^{-3} + f_{22}z^{-4} \\
\Leftrightarrow 1 &= 1 + (e_{21} - 1{,}7)z^{-1} + (f_{20} - 1{,}7e_{21} + ,5)z^{-2} \\
&\quad + (f_{21} + 0{,}5e_{21} + 0{,}2)z^{-3} + (f_{22} + 0{,}2e_{21})z^{-4}
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes

$$\begin{aligned}
0 &= e_{21} - 1{,}7 \qquad &\Rightarrow e_{21} &= 1{,}7 \\
0 &= f_{20} - 1{,}7e_{21} + ,5 \qquad &\Rightarrow f_{20} &= 2{,}39 \\
0 &= f_{21} + 0{,}5e_{21} + 0{,}2 \qquad &\Rightarrow f_{21} &= -1{,}05 \\
0 &= f_{22} + 0{,}2e_{21} \qquad &\Rightarrow f_{22} &= -0{,}34
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{y}(t+2) &= BE_2\Delta u(t-1+2) + F_2 y(t) \\
&= \left(1-0{,}5z^{-1}\right)\left(1+e_{21}z^{-1}\right)\Delta u(t+1) + \left(f_{20}+f_{21}z^{-1}+f_{22}z^{-2}\right)y(t) \\
&= \left(1-0{,}5z^{-1}\right)\left(1+1{,}7z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)u(t+1) + \left(2{,}39-1{,}05z^{-1}-0{,}34z^{-2}\right)y(t) \\
&= \left(1+0{,}2z^{-1}-2{,}05z^{-2}+0{,}85z^{-3}\right)u(t+1) + \left(2{,}39-1{,}05z^{-1}-0{,}34z^{-2}\right)y(t) \\
&= u(t+1)+0{,}2u(t)-2{,}05u(t-1)+0{,}85u(t-2) \\
&\quad +2{,}39y(t)-1{,}05y(t-1)-0{,}34y(t-2)
\end{aligned}
$$

Para j=3

La ecuación diofántica queda $1 = E_3A\Delta + z^{-3}F_3$.

Donde: $E_3 = 1 + e_{31}z^{-1} + e_{32}z^{-2}$ y $F_3 = f_{30} + f_{31}z^{-1} + f_{32}z^{-2}$:

Reemplazando en la ecuación diofántica

$$
\begin{aligned}
1 &= E_3A\Delta + z^{-3}F_3 \\
&= \left(1+e_{31}z^{-1}+e_{32}z^{-2}\right)\left(1-0{,}7z^{-1}-0{,}2z^{-2}\right)\left(1-z^{-1}\right) + z^{-3}\left(f_{30}+f_{31}z^{-1}+f_{32}z^{-2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow 1 &= \left(1+e_{31}z^{-1}+e_{32}z^{-2}\right)\left(1-0{,}7z^{-1}-0{,}2z^{-2}\right)\left(1-z^{-1}\right) + f_{30}z^{-3}+f_{31}z^{-4}+f_{32}z^{-5} \\
\Leftrightarrow 1 &= 1-1{,}7z^{-1}+0{,}5z^{-2}+0{,}2z^{-3}+e_{31}z^{-1}-1{,}7e_{31}z^{-2}+0{,}5e_{31}z^{-3}+0{,}2e_{31}z^{-4} \\
&\quad +e_{32}z^{-2}-1{,}7e_{32}z^{-3}+0{,}5e_{32}z^{-4}+0{,}2e_{32}z^{-5}+f_{30}z^{-3}+f_{31}z^{-4}+f_{32}z^{-5} \\
\Leftrightarrow 1 &= 1+(e_{31}-1{,}7)z^{-1}+(e_{32}-1{,}7e_{31}+0{,}5)z^{-2}+(f_{30}-1{,}7e_{32}+0{,}5e_{31}+0{,}2)z^{-3} \\
&\quad +(f_{31}+0{,}5e_{32}+0{,}2e_{31})z^{-4}+(f_{32}+0{,}2*e_{32})z^{-5}
\end{aligned}
$$

Igualando coeficientes

$$
\begin{aligned}
0 &= e_{31}-1{,}7 && \Rightarrow e_{31}=1{,}7 \\
0 &= e_{32}-1{,}7e_{31}+0{,}5 && \Rightarrow e_{32}=2{,}39 \\
0 &= f_{30}-1{,}7e_{32}+0{,}5e_{31}+0{,}2 && \Rightarrow f_{30}=3{,}013 \\
0 &= f_{31}+0{,}5e_{32}+0{,}2e_{31} && \Rightarrow f_{31}=-1{,}535 \\
0 &= f_{32}+0{,}2*e_{32} && \Rightarrow f_{32}=-0{,}478
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{y}(t+3) &= BE_3\Delta u(t-1+3) + F_3 y(t) \\
&= \left(1-0{,}5z^{-1}\right)\left(1+e_{31}z^{-1}+e_{32}z^{-1}\right)\Delta u(t+2) + \left(f_{30}+f_{31}z^{-1}+f_{32}z^{-2}\right)y(t) \\
&= \left(1-0{,}5z^{-1}\right)\left(1+1{,}7z^{-1}+2{,}39z^{-2}\right)\left(1-z^{-1}\right)u(t+1) \\
&\quad +\left(3{,}013-1{,}535z^{-1}-0{,}478z^{-2}\right)y(t) \\
&= \left(1+0{,}2z^{-1}+0{,}34z^{-2}-2{,}735z^{-3}+1{,}195z^{-4}\right)u(t+1) \\
&\quad +\left(3{,}013-1{,}535z^{-1}-0{,}478z^{-2}\right)y(t) \\
&= u(t+2)+0{,}2u(t+1)+0{,}34u(t)-2{,}735u(t-1)+1{,}195u(t-2) \\
&\quad +3{,}013y(t)-1{,}535y(t-1)-0{,}478y(t-2)
\end{aligned}
$$

Resumen resultados

$$\hat{y}(t+1) = u(t) - 1{,}5u(t-1) + 0{,}5u(t-2) + 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2)$$

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+2) = u(t+1) + 0{,}2u(t) - 2{,}05u(t-1) + 0{,}85u(t-2) \\ + 2{,}39y(t) - 1{,}05y(t-1) - 0{,}34y(t-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+3) = u(t+2) + 0{,}2u(t+1) + 0{,}34u(t) - 2{,}735u(t-1) + 1{,}195u(t-2) \\ + 3{,}013y(t) - 1{,}535y(t-1) - 0{,}478y(t-2)\end{aligned}$$

Comparando resultados

Comprobando los resultados obtenidos realizando predicciones resolviendo la recurrencia:

$$y(t) = 0{,}7y(t-1) + 0{,}2y(t-2) + u(t-1) - 0{,}5u(t-2) + \frac{e(t)}{\Delta}$$

Con esto:

$$\Delta y(t) = 0{,}7\Delta y(t-1) + 0{,}2\Delta y(t-2) + \Delta u(t-1) - 0{,}5\Delta u(t-2) + e(t)$$

Desarrollando y reordenando se obtiene

$$y(t) = 1{,}7y(t-1) - 0{,}5y(t-2) - 0{,}2y(t-3) + u(t-1) - 1{,}5u(t-2) + 0{,}5u(t-3) + e(t)$$

con esto: $e(t) = -1{,}7y(t-1) + 0{,}5y(t-2) + 0{,}2y(t-3) - u(t-1) + 1{,}5u(t-2) - 0{,}5u(t-3)$

Entonces, recordando que $E\{e(t+j)\} = 0$ para $j > 1$ y además los datos conocidos para la predicción son $y(t), y(t-1), \ldots y(t-n)$ y la entrada:

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+1) &= E\{y(t+1)\} \\ &= 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + u(t) - 1{,}5u(t-1) + 0{,}5u(t-2) + E\{e(t+1)\} \\ &= 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + u(t) - 1{,}5u(t-1) + 0{,}5u(t-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+2) &= E\{y(t+2)\} \\ &= 1{,}7\hat{y}(t+1) - 0{,}5y(t) - 0{,}2y(t-1) + u(t+1) - 1{,}5u(t) + 0{,}5u(t-1) + E\{e(t+2)\} \\ &= 1{,}7\left(1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + u(t) - 1{,}5u(t-1) + 0{,}5u(t-2)\right) \\ &\quad - 0{,}5y(t) - 0{,}2y(t-1) + u(t+1) - 1{,}5u(t) + 0{,}5u(t-1) \\ &= 2{,}39y(t) - 1{,}05y(t-1) - 0{,}34y(t-2) \\ &\quad + u(t+1) + 0{,}2u(t) - 2{,}05u(t-1) + 0{,}85u(t-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+3) &= E\{y(t+3)\} \\ &= 1{,}7\hat{y}(t+2) - 0{,}5\hat{y}(t+1) - 0{,}2y(t) + u(t+2) - 1{,}5u(t+1) + 0{,}5u(t) + E\{e(t+3)\} \\ &= 3{,}013y(t) - 1{,}535y(t-1) - 0{,}478y(t-2) \\ &\quad + u(t+2) + 0{,}2u(t+1) + 0{,}34u(t) - 2{,}735u(t-1) + 1{,}195u(t-2)\end{aligned}$$

Gráficos:

(Pendientes)

(b) Determinar explícitamente $u(t)$ de forma que se minimice $J = \hat{y}(t+1)^2 + \lambda \Delta u(t)^2$ (Controlador de Varianza Minima)

$$\min_{\Delta u(t)} J = \frac{1}{2}\left(\hat{y}(t+1)^2 + \lambda \Delta u(t)^2\right) \tag{20}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta u(t)} = \hat{y}(t+1)\frac{\partial \hat{y}(t+1)}{\partial \Delta u(t)} + \lambda \Delta u(t) = 0 \tag{21}$$

con

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+1) &= 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + u(t) - 1{,}5u(t-1) + 0{,}5u(t-2) \\ &= 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + \Delta u(t) - 0{,}5\Delta u(t-1)\end{aligned}$$

$$u(t) - 1{,}5u(t-1) + 0{,}5u(t-2) = u(t) - u(t-1) - 0{,}5(u(t-1) - u(t-2))$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow (1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + \Delta u(t) - 0{,}5\Delta u(t-1)) \cdot 1 + \lambda \Delta u(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) - 0{,}5\Delta u(t-1) + (1+\lambda)\,\Delta u(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1+\lambda)\,\Delta u(t) + 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) - 0{,}5\Delta u(t-1) = 0\end{aligned}$$

$$\Delta u(t) = \frac{0{,}5\Delta u(t-1) - 1{,}7y(t) + 0{,}5y(t-1) + 0{,}2y(t-2)}{1+\lambda}$$

Pero $\Delta u(t) = u(t) - u(t-1)$

$$u(t) = \frac{0{,}5\Delta u(t-1) - 1{,}7y(t) + 0{,}5y(t-1) + 0{,}2y(t-2)}{1+\lambda} + u(t-1)$$

Si se expande lo anterior se obtiene:

$$u(t) = \frac{(1{,}5+\lambda)u(t-1) - 0{,}5u(t-2) - 1{,}7y(t) + 0{,}5y(t-1) + 0{,}2y(t-2)}{1+\lambda}$$

(c) Determinar la estabilidad del sistema a partir de la ecuación característica del lazo cerrado. ¿Existe un rango de valores de λ para el cual el sistema controlado es estable?.

Ecuación del modelo:

$$y(t) = 0{,}7y(t-1) + 0{,}2y(t-2) + u(t-1) - 0{,}5u(t-2) + \frac{e(t)}{\Delta}$$

$$\left(1 - 0{,}7z^{-1} - 0{,}2z^{-2}\right) y(t) = \left(1 - 0{,}5z^{-1}\right) u(t-1) + \frac{e(t)}{\Delta} \tag{22}$$

$$A(z^{-1}) = 1 - 0{,}7z^{-1} - 0{,}2z^{-2}$$
$$B(z^{-1}) = 1 - 0{,}5z^{-1}$$

Se nombrará $H(z^{-1})$ la función de transferencia del sistema en lazo abierto, entonces, la ecuación característica en lazo cerrado será de la forma:

$$y(t) = H(z^{-1})G(z^{-1})y(t-1) \tag{23}$$

En este caso se tiene un sistema de la forma: $A(z^{-1})\Delta y(t) = B(z^{-1})z^{-1}\Delta u(t)$ (Nota: se mantendrá el $\Delta u(t)$)

$$H(z^{-1}) = \frac{y(t)}{\Delta u(t)} = \frac{B(z^{-1})z^{-1}}{A(z^{-1})\Delta} = \frac{(1-0{,}5z^{-1})z^{-1}}{(1-0{,}7z^{-1}-0{,}2z^{-2})(1-z^{-1})} \tag{24}$$

Por otro lado el controlador se puede escribir como:

$$\Delta u(t) = \frac{0{,}5\Delta u(t-1) - 1{,}7y(t) + 0{,}5y(t-1) + 0{,}2y(t-2)}{1+\lambda}$$

$$(1+\lambda)\Delta u(t) = 0{,}5z^{-1}\Delta u(t) - (1{,}7 - 0{,}5z^{-1} - 0{,}2z^{-2})y(t)$$
$$(1+\lambda - 0{,}5z^{-1})\Delta u(t) = -(1{,}7 - 0{,}5z^{-1} - 0{,}2z^{-2})y(t)$$
$$\Delta u(t) = \frac{-(1{,}7 - 0{,}5z^{-1} - 0{,}2z^{-2})}{(1+\lambda - 0{,}5z^{-1})}y(t) = G(z^{-1})y(t)$$

$$u(t) = \frac{(-1{,}7 + 0{,}5z^{-1} + 0{,}2z^{-2})}{(1+\lambda - (1{,}5+\lambda)z^{-1} + 0{,}5z^{-2})}y(t) = G_2(z^{-1})y(t)$$

Con esto:

$$\begin{aligned} y(t) &= H(z^{-1})G(z^{-1})y(t-1) \\ &= \frac{(1-0{,}5z^{-1})z^{-1}}{(1-0{,}7z^{-1}-0{,}2z^{-2})\Delta}\frac{(-1{,}7+0{,}5z^{-1}+0{,}2z^{-2})}{(1+\lambda-0{,}5z^{-1})}y(t-1) \\ &= \frac{(-1{,}7z^{-1}+1{,}35z^{-2}-0{,}05z^{-3}-0{,}10z^{-4})}{\lambda+1+(-2{,}2-1{,}7\lambda)z^{-1}+(0{,}5\lambda+1{,}35)z^{-2}+(-0{,}05+0{,}2\lambda)z^{-3}-0{,}10z^{-4}}y(t-1) \end{aligned}$$

Entonces se deben encontrar los polos de:

$$\lambda + 1 + (-2{,}2 - 1{,}7\lambda)z^{-1} + (0{,}5\lambda + 1{,}35)z^{-2} + (-0{,}05 + 0{,}2\lambda)z^{-3} - 0{,}10z^{-4} = 0$$

con esto el resultado que se obtiene es:

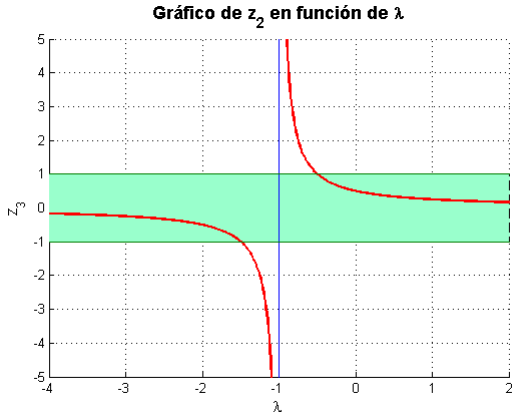
$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ z_2 &= \frac{0{,}5}{(1+\lambda)} \\ z_3 &= 0{,}9178908346 \\ z_4 &= -0{,}2178908346 \end{aligned}$$

Se puede ver que $z_1, z_3, z_4 \leq 1$, es decir se encuentran dentro del círculo unitario.

Lo que interesa es ver las limitaciones sobre λ con el fin de que z_2 también se encuentre dentro del círculo unitario, es decir, se garantice que $-1 \leq z_2 \leq 1$ ($|z_2| \leq 1$):

$$\left|\frac{0{,}5}{(1+\lambda)}\right| \leq 1$$

Gráfico de z_2 en función de λ:



Con lo anterior, se puede deducir que

$$-1 \leq \frac{0{,}5}{(1+\lambda)} \leq 1$$

Sólo si $\lambda \leq -1{,}5$ y si $\lambda \geq -0{,}5$, Por ende, sí hay un rango de λ, donde el sistema es estable. Es más, dada la función objetivo, es lógico que λ sea positivo, y directamente se observa que para cualquier λ positivo se cumple con lo deseado.

En el caso de no haber un (o un rango de) λ para el cual el sistema sea estable, el sistema no se puede controlar mediante éste método de control.

Nota:
Otra forma de encontrar el rango sobre es utilizando la ecuación característica, pero en este caso hay que tomar en cuenta que al controlador entra $y(t)$ y no $e(t) = ref(t) - y(t)$, de hecho, dada la función objetivo se observa que se quiere controlar el sistema alrededor de una referencia igual a cero (es decir $e(t) = -y(t)$).

Entonces la ecuación característica sería (el signo "$-$" es debido a lo comentado anteriormente, hacer el diagrama de bloques para mayor claridad):

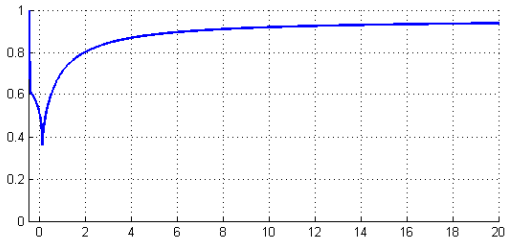
$$1 - H(z^{-1})G(z^{-1}) = 0$$

A partir de esta ecuación si se simulan los polos obtenidos en función de λ (las expresiones obtenidas son engorrosas...) se puede ver que se obtiene que para $\lambda \geq -0{,}5$ el sistema es estable. Pero dada la función de costo claramente $\lambda \geq 0$.

De todos modos revisar: pero la ecuación que se debe resolver para encontrar los polos del sistema es:

$$-\lambda - 1 + (0{,}5 + 1{,}7\lambda)z^{-1} - 0{,}5\lambda z^{-2} - 0{,}2\lambda z^{-3} = 0$$

Se graficó solamente el máximo del valor absoluto de los polos obtenidos:



(d) Suponga ahora que la variable manipulada está restringida a tomar los valores enteros $u_{min} = 0$ y $u_{max} = 1$ y la variable controlada tiene que ser menor que y_{max}. Plantee el problema de optimización y resuélvalo analíticamente.

Ya que son pocos casos una posibilidad es probar todos los casos:

Este problema se debe escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min_{\Delta u(t)} J &= \hat{y}(t+1)^2 + \lambda \Delta u(t)^2 \\ s.a.: & \\ u(t) &= 0 \quad \text{o} \quad u(t) = 1 \\ y(t) - y_{max} &\leq 0 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+1) &= 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + u(t) - 1{,}5u(t-1) + 0{,}5u(t-2) \quad (25) \\ &= 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + \Delta u(t) - 0{,}5\Delta u(t-1) \quad (26) \end{aligned}$$

- $u(t-1) = 0$ y $u(t) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J &= \hat{y}(t+1)^2 + \lambda \Delta u(t)^2 \\ &= 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + \Delta u(t) - 0{,}5\Delta u(t-1) + \lambda \Delta u(t)^2 \\ &= 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + u(t) - 1{,}5u(t-1) + 0{,}5u(t-2) + \lambda \Delta u(t)^2 \\ &= 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + 0{,}5u(t-2) \end{aligned}$$

- $u(t-1) = 1$ y $u(t) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J &= \hat{y}(t+1)^2 + \lambda \Delta u(t)^2 \\ &= 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + u(t) - 1{,}5u(t-1) + 0{,}5u(t-2) + \lambda \Delta u(t)^2 \\ &= 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + 0{,}5u(t-2) - 1{,}5 + \lambda \end{aligned}$$

- $u(t-1) = 0$ y $u(t) = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J &= \hat{y}(t+1)^2 + \lambda \Delta u(t)^2 \\ &= 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + u(t) - 1{,}5u(t-1) + 0{,}5u(t-2) + \lambda \Delta u(t)^2 \\ &= 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + 0{,}5u(t-2) + 1 + \lambda \end{aligned}$$

- $u(t-1) = 1$ y $u(t) = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J &= \hat{y}(t+1)^2 + \lambda \Delta u(t)^2 \\ &= 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + u(t) - 1{,}5u(t-1) + 0{,}5u(t-2) + \lambda \Delta u(t)^2 \\ &= 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + 0{,}5u(t-2) - 0{,}5 \end{aligned}$$

A simple vista se puede ver que la función objetivo J se minimiza cuando:
"$u(t-1)=1$ y $u(t)=0$" o cuando "$u(t-1)=1$ y $u(t)=1$", dependiendo el valor de λ (positivo).
También se podría hacer con programación lineal entera, lo cual en este caso no es necesario, ni tampoco conveniente.

Restricciones sobre $u(t)$ y $y(t)$:

$$\begin{aligned} \min_{\Delta u(t)} J &= \hat{y}(t+1)^2 + \lambda \Delta u(t) \\ s.a.: & \\ & u_{min} \leq u(t) \leq u_{max} \\ & y(t) \leq y_{max} \end{aligned}$$

Este problema se debe escribir de la siguiente forma (general):

$$\begin{aligned} \min_{\Delta u(t)} J &= \hat{y}(t+1)^2 + \lambda \Delta u(t) \\ s.a.: & \\ & -u(t) - u_{min} \leq 0 \\ & u(t) - u_{max} \leq 0 \\ & y(t) - y_{max} \leq 0 \end{aligned}$$

Construimos el Lagrangiano:

$$L = \hat{y}(t+1) + \lambda \Delta u(t)^2 - \lambda_r \left[(-u(t) - u_{min}) + \nu_1 + (u(t) - u_{max}) + \nu_2 + (y(t) - y_{max}) + \nu_2\right]$$

con

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+1) &= 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + u(t) - 1{,}5u(t-1) + 0{,}5u(t-2) && (27) \\ &= 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + \Delta u(t) - 0{,}5\Delta u(t-1) && (28) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} L &= \hat{y}(t+1) + \lambda \Delta u(t)^2 - \lambda_r \left[(-u(t) - u_{min}) + \nu_1^2 + (u(t) - u_{max}) + \nu_2^2 + (y(t) - y_{max}) + \nu_3^2\right] \\ &= 1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + \Delta u(t) - 0{,}5\Delta u(t-1) \\ &\quad + \lambda \Delta u(t)^2 - \lambda_r \left[-u_{min} + \nu_1^2 - u_{max} + \nu_2^2 + (y(t) - y_{max}) + \nu_3^2\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \Delta u(t)} &= 2(1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + \Delta u(t) - 0{,}5\Delta u(t-1)) + 2\lambda \Delta u(t) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Delta \lambda_r} &= -u_{min} + \nu_1^2 - u_{max} + \nu_2^2 + (y(t) - y_{max}) + \nu_3^2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Delta \nu_1} &= -2\lambda_r \nu_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Delta \nu_2} &= -2\lambda_r \nu_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Delta \nu_3} &= -2\lambda_r \nu_3 = 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación se obtiene (ver parte (b)):

$$(1{,}7y(t) - 0{,}5y(t-1) - 0{,}2y(t-2) + \Delta u(t) - 0{,}5\Delta u(t-1)) + \lambda \Delta u(t) = 0$$

$$(1+\lambda)\Delta u(t) = 0{,}5\Delta u(t-1) - (1{,}7 - 0{,}5z^{-1} - 0{,}2z^{-2})y(t)$$

$$(1+\lambda - 0{,}5z^{-1})\Delta u(t) = -(1{,}7 - 0{,}5z^{-1} - 0{,}2z^{-2})y(t)$$

$$\Delta u(t) = \frac{-(1{,}7 - 0{,}5z^{-1} - 0{,}2z^{-2})}{(1+\lambda - 0{,}5z^{-1})} y(t)$$

del resto de las ecuaciones hay que ver los casos:

Caso 1: $\lambda_r = 0$, independiente del valor de ν_1, ν_2 y ν_3, las cuales pueden o no ser igual a 0.
En este caso las restricciones no tienen importancia, es decir no influyen en el resultado. Esto lleva a que no se u(t) no esté restringido, por lo cual no es útil esta solución para un problema en el cual sí importan las restricciones. (Es análogo al caso 1 del Problema con restricciones sobre u(t) solamente).
Notar que si alguna de las variables ν_1, ν_2 o ν_3 es distinto de cero $\Rightarrow \lambda_r = 0$ (ver las tres últimas ecuaciones), por lo cual el otro caso es:

Caso 2: $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 0$ o $\nu_3 = 0$
Resolviendo la segunda ecuación se tiene que la salida es:

$$y(t) = u_{max} + y_{max} - u_{min}$$

y $\Delta u(t)$:

$$\Delta u(t) = \frac{-(1{,}7 - 0{,}5z^{-1} - 0{,}2z^{-2})}{(1+\lambda - 0{,}5z^{-1})}(u_{max} + y_{max} - u_{min})$$

Caso particular cuando $u_{min} = 0$ y $u_{max} = 1$, entonces

$$y(t) = 1 + y_{max}$$

Raro: y(t) no puede ser mayor que y_{max}

$$\Delta u(t) = \frac{-(1{,}7 - 0{,}5z^{-1} - 0{,}2z^{-2})}{(1+\lambda - 0{,}5z^{-1})}(1 + y_{max})$$