

Guía 1 EL650 - Control Avanzado de Sistemas

Estabilidad según Lyapunov y Función Descriptora

Prof: Marcos Orchard. Aux: Felipe Tobar

August 13, 2009

1 Método Directo de Lyapunov, caso no lineal

1.1 Parte a

Considere el sistema de segundo orden

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{-6x_1}{u^2} + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-2(x_1 + x_2)}{u^2}\end{aligned}\tag{1}$$

donde $u = 1 + x_1^2$.

Sea $V(x) = \frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^2} + x_2^2$. Que tipo de estabilidad presenta el origen?

1.2 Parte b

Sean los sistemas:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2\end{aligned}\tag{2}$$

y

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_1^2\end{aligned}\tag{3}$$

Considerando

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

. Que puede afirmar sobre la estabilidad de (2) y (3)?

2 Método Indirecto de Lyapunov

Considere el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2x_3 + 1 \\ \dot{x}_2 &= x_1x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_3^2(1 - x_3)\end{aligned}\tag{4}$$

Encuentre sus puntos de equilibrio, y usando el *Método Indirecto de Lyapunov*, clasifíquelos.

3 Método Directo de Lyapunov, caso lineal

3.1 Parte a - Oscilador Armónico

Considere:

$$M\ddot{q} + B\dot{q} + Kq = 0\tag{5}$$

Estudie la estabilidad del sistema.

Hint: Reescriba el sistema en variables de estado, encuentre un análogo físico (o eléctrico) y use su energía como candidata a función de Lyapunov.

3.2 Parte b

Para los siguientes sistemas mostrar que el origen es asintóticamente estable:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & \alpha(t) \\ -\alpha(t) & -2 \end{bmatrix} x \quad (6)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \alpha(t) & -2 \end{bmatrix} x \quad (7)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & \alpha(t) \\ \alpha(t) & -2 \end{bmatrix} x, \quad |\alpha(t)| \leq 1 \quad (8)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha(t) \end{bmatrix} x, \quad |\alpha(t)| \geq 2 \quad (9)$$

En todos los casos $\alpha(t)$ es una función acotada y continua $\forall t$

4 Funciones Descriptoras

Verifique las siguientes funciones descriptoras de un sistema no lineal $\psi(y)$, frente a una entrada $y = a \sin(\omega t)$:

$$\psi(y) = y^5; \quad \Psi(a) = \frac{5a^4}{8} \quad (10)$$

$$\psi(y) = y^3|y|; \quad \Psi(a) = \frac{32a^3}{15\pi} \quad (11)$$

5 Soluciones periódicas

Verifique la existencia de soluciones periódicas para los siguientes sistemas:

$$\psi(y) = y^5; \quad G(s) = \frac{1-s}{s(s+1)} \quad (12)$$

$$\psi(y) = \operatorname{sgn}(y); \quad G(s) = \frac{s+6}{s(s+2)(s+3)} \quad (13)$$

Donde los bloques $\psi(\cdot)$ y $G(s)$ están en serie y además el sistema tiene realimentación de ganancia unitaria.