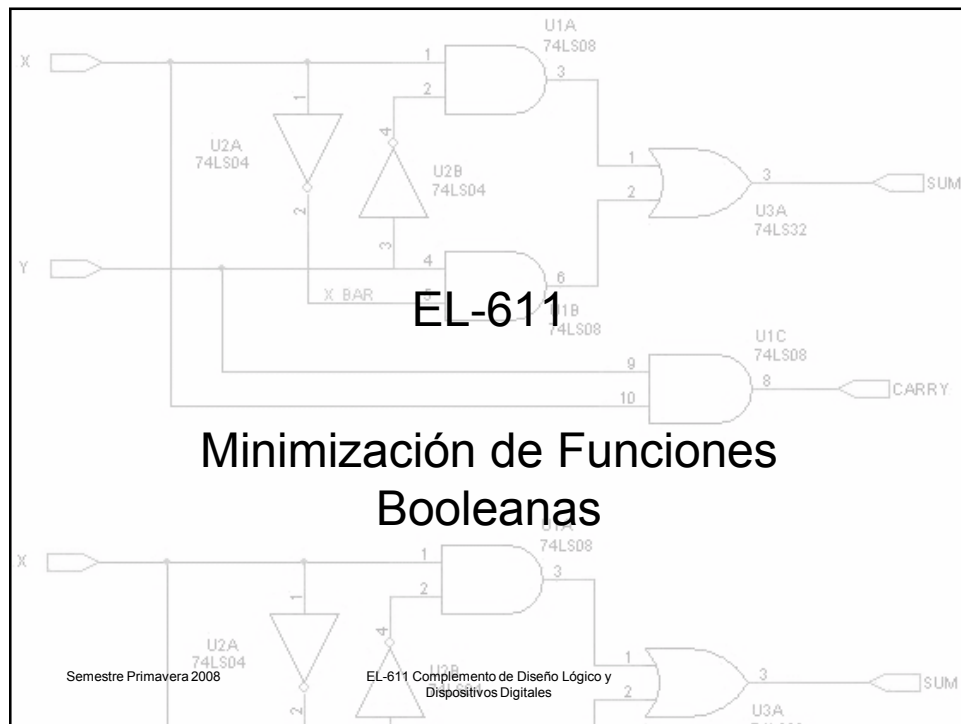




Minimización de Funciones Booleanas

- Método “Algebraico”
 - Se aplican los postulados y teoremas del Álgebra de Boole
- Método Visual
 - Mapa de Karnaugh
 - Mapa de Entrada Variable (MEV)
- Método Tabular
 - Método de Quine
 - Método de Quine-MaCluskey

Ejemplo de una Expresión Booleana

$$f(x, y, z) = \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + xyz + x\bar{y}z$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6)

a) 1 con 2; 2 con 3; 4 con 5 y 5 con 6

$$f(x, y, z) = \bar{x}\bar{z} + \bar{y}z + yz + xz$$

Expresión Irredundante o Irreducible

b) 1 con 2; 3 con 6 y 4 con 5

$$f(x, y, z) = \bar{x}\bar{z} + x\bar{y} + yz$$

Expresión Irredundante y Mínima

c) 1 con 4; 2 con 3 y 5 con 6

$$f(x, y, z) = \bar{x}y + \bar{x}\bar{z} + xz$$

Expresión Irredundante y Mínima

CONCLUSION: Una expresión irredundante no es necesariamente mínima, ni una expresión mínima es siempre única

Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y Dispositivos Digitales

Mapas de Karnaugh

- Mapa en un Plano de cubos Booleanos
 - se pliega en los bordes
 - difícil de dibujar y visualizar para mas de 4 dimensiones
 - virtualmente imposible para mas de 6 dimensiones
- Alternativa a la tabla de verdad para ayudar a visualizar adyacencias
 - se aplica el teorema básico: $AB + AB' = A(B + B') = A$
 - a diferencia en una tabla de verdad, elementos en "1" que difieren en una variable son adyacentes

A \ B	0	1
0	0	1
1	0	0

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y Dispositivos Digitales

Mapas de Karnaugh (cont')

- Esquema numérico basado en código Gray
 - e.g., 00, 01, 11, 10
 - cambios de un solo bit en el código para celdas adyacentes del mapa

AB \ C		A			
		00	01	11	10
C	0	0	2	6	4
	1	1	3	7	5

C \ B		A			
		0	2	6	4
C	0	0	2	6	4
	1	1	3	7	5

C \ B		A			
		0	4	12	8
C	0	0	4	12	8
	1	1	5	13	9
C	2	3	7	15	11
	3	2	6	14	10

$$13 = 1101 = ABC'D$$

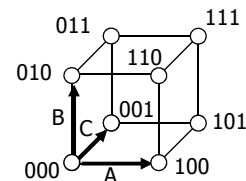
Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y
Dispositivos Digitales

Adyacencias en mapas de Karnaugh

- Pliegue desde la primera a la última columna
- Pliegue de la fila superior con la inferior

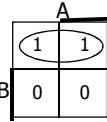
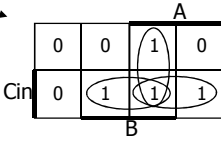
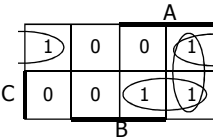
C \ B		A			
		000	010	110	100
C	0	000	010	110	100
	1	001	011	111	101



Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y
Dispositivos Digitales

Ejemplos de mapas de Karnaugh

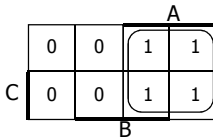
- $F =$  B'
- $Cout =$  $AB + ACin + BCin$
- $f(A,B,C) = \sum m(0,4,5,7)$  $AC + B'C' + AB'$

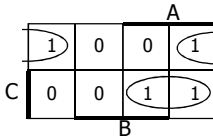
Obtener el complemento de la función cubriendo los 0's con subcubos

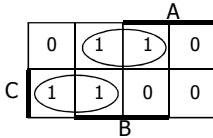
Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y Dispositivos Digitales

Mas ejemplos de mapas de Karnaugh


 $G(A,B,C) = A$


 $F(A,B,C) = \sum m(0,4,5,7) = AC + B'C'$



F' simplemente reemplaza 1's con 0's y vice versa

 $F'(A,B,C) = \sum m(1,2,3,6) = BC' + A'C$

Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y Dispositivos Digitales

Mapa de Karnaugh: ejemplo de 4-variables

- $F(A,B,C,D) = \sum m(0,2,3,5,6,7,8,10,11,14,15)$

F =

	A			
	1	0	0	1
	0	1	0	0
C	1	1	1	1
	1	1	1	1
	B			

encontrar el menor numero posible de subcubos mas grandes para cubrir los 1's (menos términos con la menor cantidad de entradas por término)

Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y Dispositivos Digitales

Mapas de Karnaugh: no importa (don't cares)

➤ $f(A,B,C,D) = \sum m(1,3,5,7,9) + d(6,12,13)$

➤ sin términos "no importa"

➤ $f = A'D + B'C'D$

	A			
	0	0	X	0
	1	1	X	1
C	1	1	0	0
	0	X	0	0
	B			

Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y Dispositivos Digitales

Mapas de Karnaugh: no importa (cont')

- $f(A,B,C,D) = \sum m(1,3,5,7,9) + d(6,12,13)$
 - $f = A'D + B'C'D$ sin "no importa"
 - $f = A'D + C'D$ con "no importa"

	A			
	0	0	X	0
	1	1	X	1
C	1	1	0	0
	0	X	0	0
	B			

Utilizando términos NI como "1" se puede formar un cubo-2 en vez de un cubo-1 para cubrir este nodo

Términos NI pueden ser tratados como 1's o 0's dependiendo de la ventaja que se quiera aprovechar

Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y Dispositivos Digitales

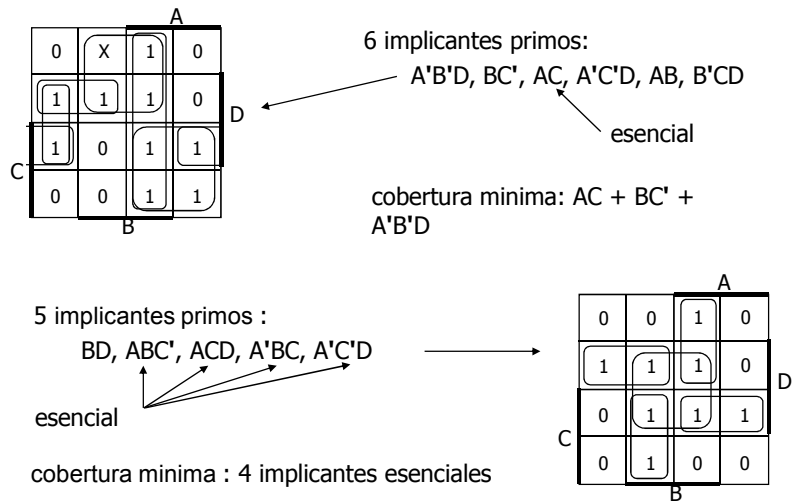
Ejemplo

- Minimizar la función $F = \sum m(0, 2, 7, 8, 14, 15) + d(3, 6, 9, 12, 13)$

Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y Dispositivos Digitales

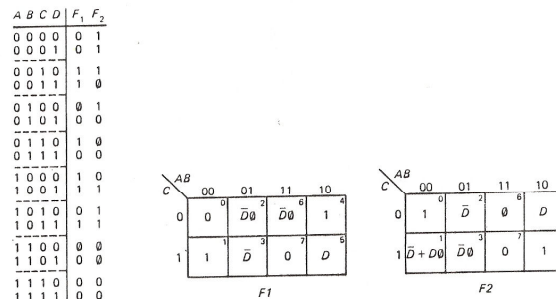
Implicantes Primos y Esenciales



Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y
Dispositivos Digitales

Mapa de Entrada Variable (MEV)



Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y
Dispositivos Digitales

Mapa de Entrada Variable (MEV)

Lectura del MEV

Paso 1: Se reemplazan todas las variables 1's por la variable + variable'. Luego aplicar las siguientes reglas:

- a) Cubrir las variables solas que no puedan cubrirse con otra variable MEV idéntica de una celda adyacente; o con un 1, o con un ϕ
- b) Cubrir todas la variables MEV idénticas en celdas adyacentes
- c) Cubrir todas las variables MEV que lo puedan hacer con un 1
- d) Ídem a lo anterior pero con un ϕ
- e) Tener precaución cuando la variable MEV se pueda cubrir de más de una forma
- f) Continuar cubriendo para grupos de a 4, 8, etc. variables MEV

Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y
Dispositivos Digitales

Mapa de Entrada Variable (MEV)

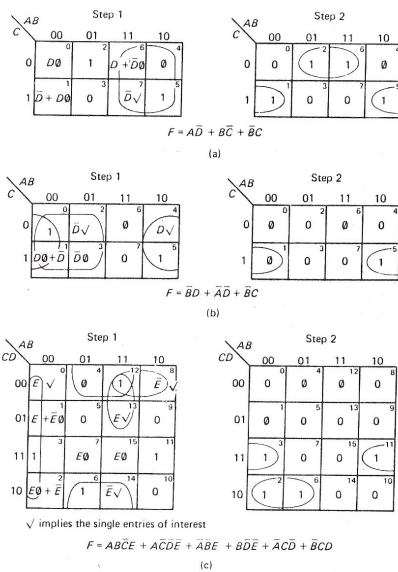
Lectura del MEV

Paso 2: Una vez que todas las variables solas hayan sido cubiertas, se debe transformar el Mapa de acuerdo a las siguientes reglas:

- a) Reemplazar las variables MEV y MEV' por 0
- b) Dejar los 0 y ϕ tal cual
- c) Dejar los 1's tal cual si no fueron cubierto completamente. De lo contrario dejar ϕ
- d) $MEV \cdot \phi$ y $MEV' \cdot \phi$ quedan en 0
- e) $(MEV + MEV \cdot \phi)$ y $(MEV + MEV' \cdot \phi)$ quedan en 1 si no fue cubierta la parte de la variable necesaria; en caso contrario queda en ϕ

Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y
Dispositivos Digitales



Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y
Dispositivos Digitales

Aplicaciones del MEV

Ejemplo:

$$F(A, B, C, G, H) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{H} + \bar{A}\bar{B}C\bar{H} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C}\bar{G} + A\bar{B}C\bar{G} + ABC + ABC$$

$$F(A, B, C, G, H) = (\bar{A}\bar{B}\bar{C})\bar{H} + (\bar{A}\bar{B}C)\bar{H} + (\bar{A}BC) + (A\bar{B}\bar{C})\bar{G} + (A\bar{B}C)\bar{G} + (ABC) + (ABC)$$

C\AB	00	01	11	10
0	$\bar{H}$	0	1	$\bar{G}$
1	$\bar{H}$	1	1	$\bar{G}$

$$F(A, B, C, G, H) = \bar{A}\bar{B}\bar{H} + A\bar{G} + AB + BC$$

Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y
Dispositivos Digitales

Método de Quine

- **Consensus:** cuando dos términos productos difieren en un literal, el consensus se obtiene al considerar el resto de los literales de ambos términos productos
- Ejemplo: $\bar{w}xz$ y $\bar{w}\bar{x}y$ El Consensus sería: $\bar{w}yz$

				y
	1	1	0	0
	0	1	1	0
w	0	0	0	0
	0	0	0	0
				z
				x

Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y
Dispositivos Digitales

Método de Quine

1. Se parte de la expresión **Suma de Productos**

$$f(x, y, z) = \bar{x}(z + \bar{y}z) + x\bar{y}z + xy\bar{z}$$

$$f(x, y, z) = \bar{x}z + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z + xy\bar{z}$$

2. Se obtienen los **consensus** entre cada par de términos productos

$$f(x, y, z) = \underbrace{\bar{x}z + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z + xy\bar{z}}_{\text{Términos Originales}} + \underbrace{\bar{x}\bar{y} + \bar{y}z + x\bar{z}}_{\text{Consensus}}$$

3. Se aplican propiedades básicas para **eliminar términos redundantes** y así obtener una expresión con los implicantes primarios de la función

$$f(x, y, z) = \bar{x}z + \bar{x}\bar{y} + \bar{y}z + x\bar{z}$$

				y
	1	1	1	0
	1	0	0	1
x				
				z

Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y
Dispositivos Digitales

Método de Quine

4. Se determina el conjunto de implicantes **esenciales**. Para ello se analizan cada uno de los implicantes primos o primarios obtenidos, de la siguiente manera:

$$f(x, y, z) = \bar{x}z + \bar{x}\bar{y} + \bar{y}z + x\bar{z}$$

↑
Se elimina

Se obtiene: $f_1(x, y, z) = \bar{x}\bar{y} + \bar{y}z + x\bar{z}$ y se calcula para $\bar{x}z = 1 \Rightarrow x = 0; z = 1$

$$f_1(0, y, 1) = \bar{y} + 0 + 0 = \bar{y} \Rightarrow \bar{x}z \text{ es esencial}$$

5. Se analizan los demás implicantes de la función para **cubrir todos los minitérminos** y determinar la(s) expresión(es) mínima(s) final(es)

$$\bar{x}z = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$$

$$x\bar{z} = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z}$$

$$\bar{x}\bar{y} = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

$$\bar{y}z = \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z$$

$$f(x, y, z) = \bar{x}z + x\bar{z} + \frac{\bar{x}\bar{y}}{\bar{y}z}$$

Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y
Dispositivos Digitales

Método de Quine-McCluskey

$$f(w, x, y, z) = \sum m(0,1,4,5,9,11,13,14,15)$$

1. Expresión Suma de Productos
2. Se representa cada minitérmino en forma binaria agrupados de acuerdo a la cantidad de unos en orden ascendente

Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y
Dispositivos Digitales

Método de Quine-McCluskey

$$f(w, x, y, z) = \sum m(0,1,4,5,9,11,13,14,15)$$

Minitérmino Cubo-0	Número Binario	Cantidad de 1's
0	0000 ✓	0
1 4	0001 ✓ 0100 ✓	1
5 9	0101 ✓ 1001 ✓	2
11 13 14	1011 ✓ 1101 ✓ 1110 ✓	3
15	1111 ✓	4

Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y
Dispositivos Digitales

Método de Quine-McCluskey

$$f(w, x, y, z) = \sum m(0,1,4,5,9,11,13,14,15)$$

Minitérmino Cubo-1	Número Binario
0,1 0,4	000- ✓ 0-00 ✓
1,5 1,9 4,5	0-01 ✓ -001 ✓ 010- ✓
5,13 9,11 9,13	-101 ✓ 10-1 ✓ 1-01 ✓
11,15 13,15 14,15	1-11 ✓ 11-1 ✓ 111- ✓

3.- Se buscan los **consensus** entre cada par de minitérminos. Estos se encontrarán entre grupos adyacentes solamente, lo que simplifica la búsqueda.

La marca ✓ en la tabla correspondiente al cubo-0 significa que el minitérmino marcado está cubierto por el implicante formado en el cubo-1.

Implicante
primario

Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y
Dispositivos Digitales

Método de Quine-McCluskey

$$f(w, x, y, z) = \sum m(0,1,4,5,9,11,13,14,15)$$

Minitérmino Cubo-2	Número Binario
0,1,4,5	0-0-
0,4,1,5	0-0-
1,5,9,13	--01
1,9,5,13	--01
9,11,13,15	1--1
9,13,11,15	1--1

4.- El procedimiento se repite para el cubo-1. En este caso habrá combinación cuando difieren en una posición y además el guión (-) está en la misma posición para ambos términos a combinar.

Implicantes
redundantes

En la tabla del cubo-1, el último implicante quedó sin marca (✓). Esto significa que dicho Implicante debe incluirse como implicante primario de la función.

Se eliminan los términos redundantes. El procedimiento continúa hasta que no se puedan hacer más combinaciones.

Se han obtenido los siguientes

Implicantes:

111- wxy

0-0- w'y'

--01 y'z

1--1 wz

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y
Dispositivos Digitales

Método de Quine-McCluskey

$$f(w, x, y, z) = \sum m(0,1,4,5,9,11,13,14,15)$$

	0	1	4	5	9	11	13	14	15
(14,15) wxy								<u>✓</u>	✓
(0,1,4,5) w'y'	<u>✓</u>	✓	<u>✓</u>	✓					
(1,5,9,13) y'z		✓		✓	✓		✓		
(9,11,13,15) wz					✓	<u>✓</u>	✓		✓
	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

$$f(w, x, y, z) = wxy + \overline{w}y + wz$$

Expresión mínima y única

Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y
Dispositivos Digitales

Método de Quine-McCluskey

Notación Simplificada

Se aprovecha la propiedad siguiente: dos números binarios se "combinan" cuando están en grupos adyacentes, es decir, cuando difieren en una potencia de 2.

Ejemplo: 0000 y 0001 difieren en 2^0 y queda:

(0,1) 000- ó bien: 0,1 (1)

1 0001 $\longrightarrow$ 1,5 (4) porque: $4 = 5 - 1$ diferencia
5 0101 $\swarrow$

La regla es: se resta el que tiene menos 1's al que tiene más 1's

Semestre Primavera 2009

EL-611 Complemento de Diseño Lógico y
Dispositivos Digitales

$f(w, x, y, z) = \sum m(0, 1, 4, 5, 7, 10, 11, 14, 15)$

Caso-0	Caso-1	Caso-2
0 ✓	0, 1 (1) ✓	0, 1, 4, 5 (1,4) -
1 ✓	0, 4 (4) ✓	0, 4, 1, 5 (1,4) -
4 ✓	1, 5 (4) ✓	10, 11, 14, 15 (1,4) -
5 ✓	4, 5 (1) ✓	10, 14, 11, 15 (1,4) -
10 ✓	5, 7 (2) -	
11 ✓	10, 11 (1) ✓	
14 ✓	10, 14 (4) ✓	
15 ✓	7, 15 (8) -	
	11, 15 (4) ✓	
	14, 15 (1) ✓	

El conjunto mínimo de Implicantes primos se obtiene de la siguiente Tabla:

Implicantes Primos	0	1	4	5	7	10	11	14	15
(5,7 (2)) $\bar{w}xz$				✓	✓				
7,15 (2) $x\bar{y}z$					✓			✓	
10, 1, 4, 5 (4) $\bar{w}\bar{y}$	✓	✓	✓	✓					
10, 11, 14, 15 (4) wy						✓	✓	✓	✓

$f(w, x, y, z) = \bar{w}\bar{y} + wy + \begin{cases} \bar{w}xz \\ xy\bar{z} \end{cases}$

Semestre Primavera 2009

$f(w, x, y, z) = \sum m(0, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11) = \sum (w, x, y, z)$
 $\bar{f}(w, x, y, z) = \sum m(1, 14)$

Cubo - 0	Cubo - 1	Cubo - 2
0 ✓	0, 2 (2) ✓	0, 2, 8, 10 (2, 8)
2 ✓	0, 4 (4) ✓	0, 4, 8, 12 (4, 8)
4 ✓	0, 6 (6) ✓	0, 6, 2, 10 (8, 2)
6 ✓	0, 8 (8) ✓	0, 8, 4, 12 (8, 4)
8 ✓	2, 3 (4) ✓	
10 ✓	2, 10 (8) ✓	8, 10, 12, 14 (2, 4)
12 ✓	4, 5 (1) ✓	8, 12, 10, 14 (4, 2)
14 ✓	4, 12 (8) ✓	
	8, 12 (4) ✓	
	3, 7 (4) ✓	
	5, 7 (2) ✓	
	10, 14 (8) ✓	
	12, 14 (2) ✓	

Redundante
 Redundante

Implicantes Primos	Mini términos							
	0	2	3	4	5	7	8	10
2, 3 (4) $\bar{w} \bar{x} y$		✓	✓					
4, 5 (1) $\bar{w} x \bar{y}$				✓	✓			
3, 7 (4) $\bar{w} y \bar{z}$						✓	✓	
5, 7 (2) $\bar{w} x z$					✓			
0, 2, 8, 10 (2, 8) $\bar{x} \bar{z}$ (*)	✓	✓						✓
6, 4, 8, 12 (8, 4) $\bar{y} \bar{z}$				✓			✓	✓
8, 10, 12, 14 (8, 4) $\bar{y} z$							✓	✓

Implicantes	Mini términos			
	3	4	5	7
2, 3 (4) $\bar{w} \bar{x} y$	✓			
4, 5 (1) $\bar{w} x \bar{y}$		✓	✓	
3, 7 (4) $\bar{w} y \bar{z}$	✓		✓	✓
5, 7 (2) $\bar{w} x z$			✓	✓
0, 2, 8, 10 (2, 8) $\bar{x} \bar{z}$				

$f(w, x, y, z) = \bar{x} \bar{z} + \bar{w} x \bar{y} + \bar{w} y \bar{z}$

Funciones Parcialmente Especificadas

Semestre Primavera 2009

Cubo - 0	Cubo - 1	
0, 1, 4, 5 ✓	0, 1 (1) $\bar{x} \bar{y}$	$f_A(x, y, z) = \sum m(0, 1, 3, 5)$
1, 4, 5, 6 ✓	1, 3 (2) $\bar{x}$	$f_B(x, y, z) = \sum m(2, 3, 5, 6)$
2, 3, 6, 7 ✓	1, 5 (4) $\bar{x}$	$f_C(x, y, z) = \sum m(0, 1, 6)$
3, 4, 6, 7 ✓	2, 3 (1) $\bar{y}$	
5, 6, 7, 8 ✓	2, 6 (4) $\bar{y}$	
6, 7, 8, 9 ✓	3, 4, 5, 6 ✓	
7, 8, 9, 10 ✓	5, 7 (2) $\bar{x} \bar{y} z$	
8, 9, 10, 11 ✓	6, 7, 8, 9 $\bar{x} \bar{y} z$	

Implicantes	Mini términos				f_A				f_B				f_C			
	0	1	3	5	2	3	5	6	0	1	6					
0, 1 (1) $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$	✓								✓	✓		✓	✓			
1, 3 (2) $\bar{x}$		✓	✓													
1, 5 (4) $\bar{x}$			✓	✓												
2, 3 (1) $\bar{y}$					✓	✓										
2, 6 (4) $\bar{y}$						✓	✓									
3, 4, 5, 6 ✓							✓	✓								
5, 7 (2) $\bar{x} \bar{y} z$								✓								
6, 7, 8, 9 $\bar{x} \bar{y} z$									✓							

Implicantes	Mini términos			
	3	2	3	
1, 3 (2) $\bar{x}$	✓			(*)
2, 3 (1) $\bar{y}$		✓	✓	(*)
2, 6 (4) $\bar{y}$		✓		
3, 4, 5, 6 ✓			✓	

$f_A(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} + \bar{x} \bar{z} + x \bar{y} z$
 $f_B(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} + x \bar{y} z + x y \bar{z}$
 $f_C(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} + x y \bar{z}$

Funciones con Salidas Múltiples

Semestre Primavera 2009