Corriente Alterna y la Potencia Activa & Reactiva

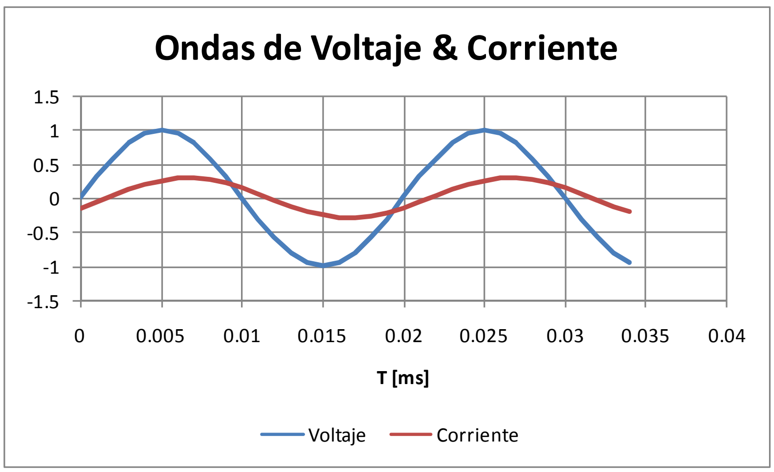
Fundamentos Matemáticos

La tensión es una onda electromagnética sinusoidal de frecuencia **ω** en [rad/s], con **ω** = 2**π**f con f en [Hz].

$$v(t) = V_{\max} Sin(\omega t)$$

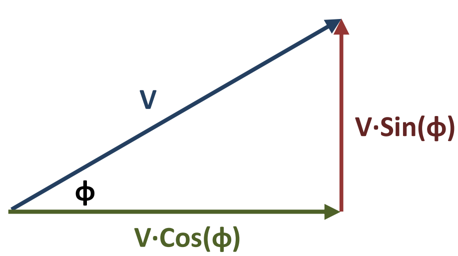
Al mismo tiempo, la corriente también será una señal sinusoidal de frecuencia **ω**, con un ángulo de desfase **φ**.

$$i(t) = I_{\max} Sin(\omega t - \varphi)$$



Las ondas sinusoidales tienen la ventaja que se pueden transformar a fasores mediante la función Fasorial F.

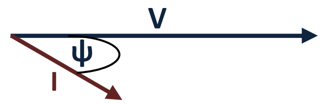
$$v(t) = VSin(\omega t + \varphi) \rightarrow F\{v(t)\} = V(Cos(\varphi) + jSin(\varphi)) = V \cdot e^{j\varphi}$$



Los fasores son vectores bidimensionales en el espacio de los números complejos.

$$\begin{aligned} v(t) &= V_{\max} Sin(\omega t) \\ i(t) &= I_{\max} Sin(\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} V &= V_{\max} e^{j\cdot 0} = V_{\max} \\ I &= I_{\max} e^{j\cdot\varphi} = I_{\max}\left(Cos(\varphi) - jSin(\varphi)\right) \end{aligned}$$

La ventaja de transformar las señales sinusoidales a fasores, es que se puede de representar el sistema en estado estacionario por medio de representaciones algebraicas en vez de usar ecuaciones diferenciales.



Principios de Electromagnetismo: Resistencia, Condensador, e Inductancia.

La Resistencia es un elemento pasivo en el cual se cumple la siguiente relación:

$$v(t) = R \cdot i(t) \Rightarrow V = R \cdot I e^{j\varphi}$$

Un condensador se representa mediante la siguiente ecuación.

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow \; i(t) = C\frac{d\left(V_{\max} Sin(\omega t)\right)}{dt} = CV_{\max}\,\omega Cos(\omega t)$$

$$i(t) = CV_{\max}\,\omega Sin\left(\omega t + \pi/2\right) \;\Rightarrow\; I = \omega CVe^{j\pi/2} \;\Rightarrow\; I = j\omega CV$$

Una inductancia se representa según la siguiente relación.

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow \; v(t) = C\frac{d\left(I_{\max} Sin(\omega t - \varphi)\right)}{dt} = LI_{\max}\,\omega Cos(\omega t - \varphi)$$

$$v(t) = LI_{\max}\,\omega Sin\left(\omega t - \varphi + \pi/2\right) \;\Rightarrow\; V = \omega LIe^{j\left(-\varphi + \pi/2\right)} \;\Rightarrow\; V = j\omega LIe^{-j\varphi}$$

Finalmente se pueden obtener representaciones de las impedancias de las Resistencias, Condensadores, e Inductancias en formato fasorial.

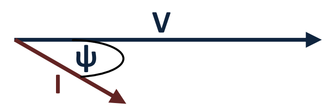
$$Z = \frac{V}{I}$$

$$Z_R = R \qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C} \qquad Z_L = j\omega L$$

Diagrama Fasorial

Un diagrama fasorial corresponde a la representación vectorial de los fasores corrientes y tensión.

$$\begin{aligned} v(t) &= V_{\max} Sin(\omega t) & \quad V &= V_{\max} \\ i(t) &= I_{\max} Sin(\omega t - \varphi) & \quad I &= I_{\max} e^{j\cdot\varphi} \end{aligned}$$



En otras palabras el fasor **V** corresponde a una onda sinusoidal de frecuencia ω y con un ángulo de desfase 0°, mientras que el fasor **I·e**$^{j\psi}$ es una onda sinusoidal de frecuencia ω y con un ángulo de desfase -ψ con respecto al fasor **V**.

Potencia Reactiva

Supongamos que una tensión **v(t)** alimenta un consumo inductivo con una corriente **i(t)**. La potencia **p(t)** es igual al producto entre la tensión **v(t)** y la corriente **i(t)**.

$$\begin{aligned} v(t) &= V_{\max} Sin(\omega t) \\ i(t) &= I_{\max} Sin(\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad p(t) = v(t)\cdot i(t) = V_{\max} Sin(\omega t)\cdot I_{\max} Sin(\omega t - \varphi)$$

Desarrollando la expresión anterior se puede obtener la siguiente expresión

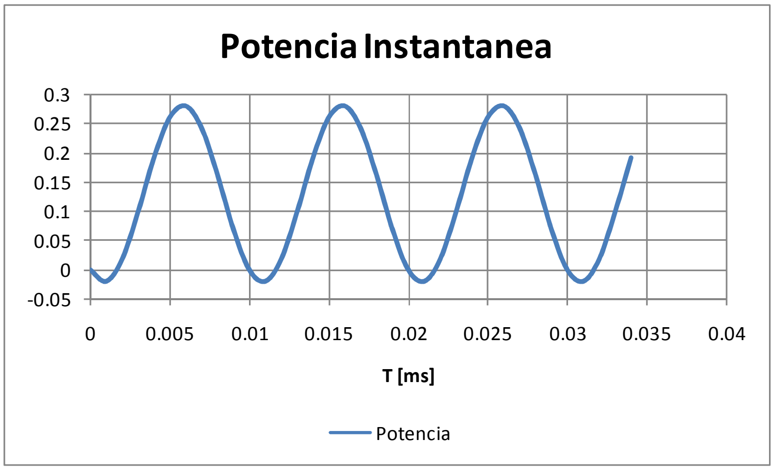
$$p(t) = V_{\max} I_{\max} Sin(\omega t)\cdot Sin(\omega t - \varphi)$$
$$p(t) = V_{\max} I_{\max} \left[Sin(\omega t)\cdot \left(Sin(\omega t)\cdot Cos(\varphi) - Sin(\varphi)\cdot Cos(\omega t)\right)\right]$$

Utilizando las siguientes identidades trigonométricas,

$$Sin^2(\omega t) = \frac{1 - Cos(2\omega t)}{2}$$
$$Sin(2\omega t) = 2\cdot Sin(\omega t)\cdot Cos(\varphi)$$

Se obtiene la siguiente expresión para la potencia instantánea.

$$p(t) = \frac{V_{\max} I_{\max}}{2}\left[Cos(\varphi) - Cos(2\omega t - \varphi)\right]$$



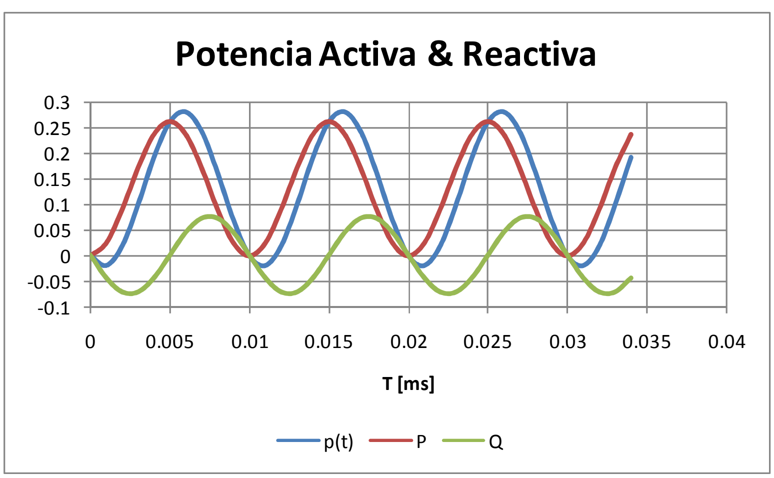
De la expresión anterior se puede observar que la potencia instantánea es una señal sinusoidal de frecuencia doble a la de la tensión aplicada, y que oscila en torno a un valor promedio de **$P=V_{max}I_{max}\cdot Cos(\psi)/2$**.
Este valor promedio P se denomina potencia media, potencia real o potencia activa, y corresponde a la potencia que realiza el trabajo.

La expresión de la potencia instantánea **p(t)**, se puede reescribir de la siguiente forma usando la siguiente identidad trigonométrica.

$$Cos(2\omega t-\varphi)=Cos(2\omega t)Cos(\varphi)-Sin(2\omega t)Sin(\varphi)$$

$$p(t)=P(1-Cos(2\omega t))-QSen(2\omega t)$$

Donde $Q= V_{max}I_{max}\cdot Sin(\psi)/2$, se denomina potencia fluctuante, potencia oculta, o potencia reactiva.



La potencia instantánea se puede descomponer en dos partes. Una onda sinusoidal de frecuencia doble que oscila en torno a la Potencia Activa **P**, y una segunda componente de magnitud igual a la Potencia Reactiva **Q** que oscila en torno a cero. Esto significa que la potencia reactiva tiene promedio cero, y por lo tanto no realiza trabajo.

Los valores de la potencia **P** y **Q** dependen del valor del desfase **ψ** entre las ondas de voltaje y corriente. Por lo tanto si el desfase **ψ** es igual a 0°, la Potencia activa **P** será igual a la potencia instantánea **p(t)**, sin embargo si el desfase entre ellos es de -90° entonces la potencia activa será igual a 0.

Cargas y La Potencia Instantánea.

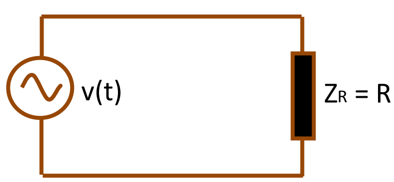
En un sistema eléctrico existen cargas:

- Resistivas (Resistencias, Ampolletas Incandescentes y Calefactores Eléctricos)
- Inductivas (Bobinas, Motores e Inductancias)
- Capacitivas (Condensadores)

Cada una de estas cargas presenta su propio comportamiento. A continuación se muestra la potencia consumida por cada tipo de carga.

Carga Resistiva:

Supongamos un circuito donde una fuente de tensión **v(t)**, alimenta una resistencia **R**, como se muestra a continuación.



$$v(t) = V_m Sin(\omega t) \rightarrow i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_m Sin(\omega t)}{R} \rightarrow \varphi = 0$$

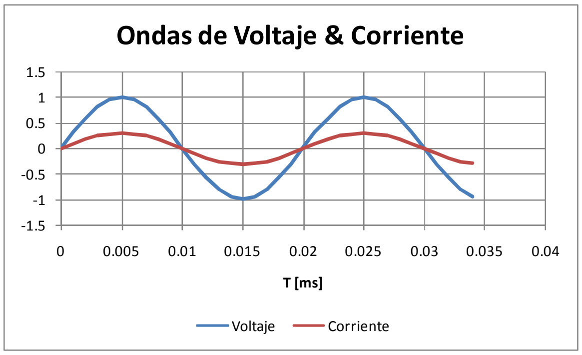
$$p(t) = \frac{V_m^2 Sin^2(\omega t)}{R} \wedge \varphi = 0 \rightarrow P = \frac{V_m^2}{2R} \wedge Q = 0$$

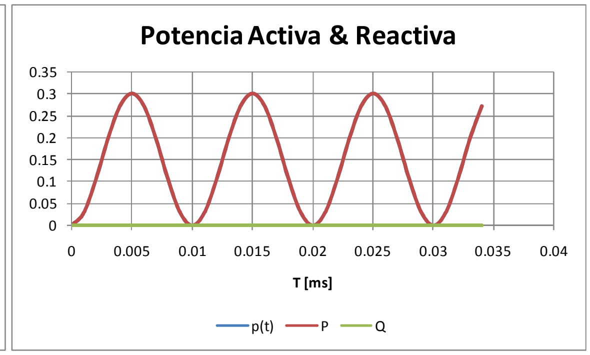
$$p(t) = \frac{V_m^2}{2R}(1 - Cos(2\omega t))$$

Trabajando con fasores se obtiene:

$$S = P + jQ = \frac{V \cdot I^*}{2} \qquad I = V/R \rightarrow I^* = V^*/R$$

$$S = \frac{\left(V_m e^{j\cdot 0} \frac{V_m}{R} e^{-j\cdot 0}\right)}{2} = \frac{V_m^2}{2R} + j\cdot 0 \rightarrow P = \frac{V_m^2}{2R} \wedge Q = 0$$





De los resultados anteriores se puede observar que una carga puramente resistiva, no provocara un desfase entre las ondas tensión y corriente, por lo tanto el desfase tendrá un valor **ψ = 0°**. Entonces una carga resistiva solo consume potencia activa y no reactiva.

Carga Inductiva:

Supongamos un circuito donde una fuente de corriente **v(t)**, alimenta una inductancia **L**, como se muestra a continuación.

$$v(t)=V_m Sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad i_L(t)=\int v(t)dt=-\frac{V_m}{\omega L}Cos(\omega t)$$

$$i_L(t)=\frac{V_m}{\omega L}Sin\left(\omega t-\pi/2\right)\rightarrow \varphi=-\pi/2=-90°$$

$$p(t)=\frac{V_m}{\omega L}Sin(\omega t)Sin\left(\omega t-\pi/2\right)$$

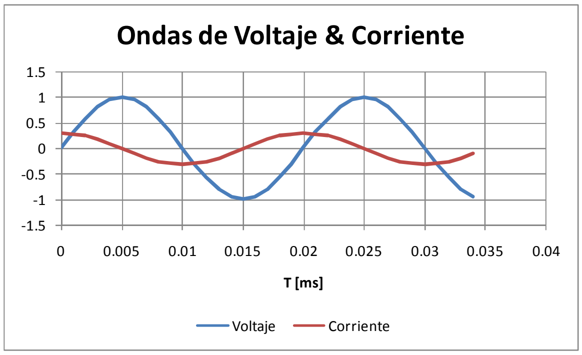
$$\varphi=-90° \rightarrow P=0 \quad \wedge \quad Q=-\frac{V_m^2}{2\omega L}$$

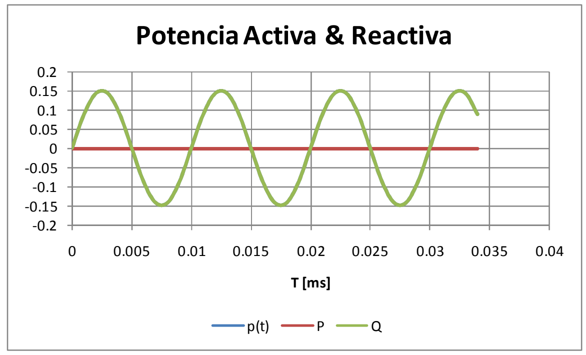
$$p(t)=\frac{\omega L V_m^2}{2}Sin(2\omega t)$$

Trabajando con fasores se obtiene:

$$S=P+jQ=\frac{V\cdot I^*}{2} \qquad I=V/j\omega L \quad \rightarrow \quad I^*=V^*/-j\omega L=V_m e^{-j\cdot 0}/\omega L e^{-j\cdot 90°}=\frac{V_m}{\omega L}e^{j\cdot 90°}$$

$$S=\frac{\left(V_m e^{j\cdot 0}\frac{V_m}{\omega L}e^{j\cdot 90°}\right)}{2}=0+j\cdot\frac{V_m^2}{2\omega L} \quad \rightarrow \quad P=0 \;\wedge\; Q=\frac{V_m^2}{2\omega L}$$



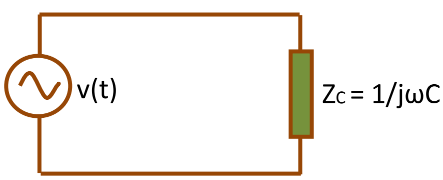


Una inductancia, es una bobina que acumula energía en su núcleo generando un campo Magnético el cual se cargara y descargara 2 veces dentro del ciclo de las ondas tensión y corriente. En otras palabras la inductancia no realizo trabajo.

Del resultado anterior se puede ver que una carga puramente inductiva no consume potencia activa, sino solo consume potencia reactiva para así inducir un campo magnético en su núcleo.

Carga Capacitiva:

Supongamos un circuito donde una fuente de tensión **v(t)**, alimenta un Condensador **C**, como se muestra a continuación.



$$v(t) = V_m Sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad i_C(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = \omega C V_m Cos(\omega t)$$

$$i_C(t) = \omega C V_m Sin\left(\omega t + \pi/2\right) \rightarrow \varphi = \pi/2 = 90°$$

$$p(t) = \omega C V_m^2 Sin(\omega t) Sin\left(\omega t + \pi/2\right)$$

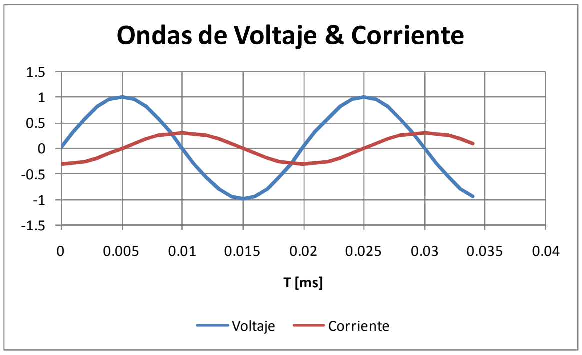
$$\varphi = 90° \ \rightarrow \ P = 0 \quad \wedge \quad Q = \frac{\omega C V_m^2}{2}$$

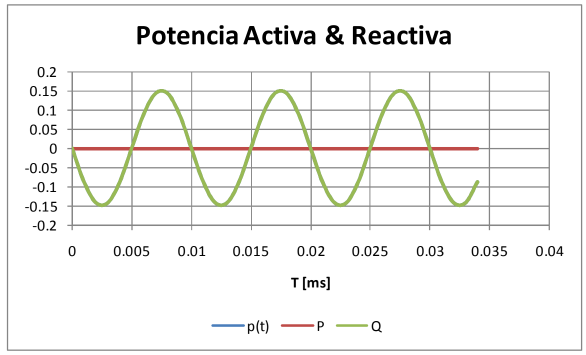
$$p(t) = -\frac{\omega C V_m^2}{2} Sin(2\omega t)$$

Trabajando con fasores se obtiene:

$$S = P + jQ = \frac{V \cdot I^*}{2} \qquad I = j\omega C \cdot V \ \rightarrow \ I^* = -j\omega C \cdot V^* = \omega C e^{-j \cdot 90°} \cdot V_m e^{-j \cdot 0} = \omega C V_m e^{-j \cdot 90°}$$

$$S = \frac{\left(V_m e^{j \cdot 0} \cdot \omega C V_m e^{-j \cdot 90°}\right)}{2} = 0 - j \cdot \frac{\omega C V_m^2}{2} \ \rightarrow \ P = 0 \ \wedge \ Q = -\frac{\omega C V_m^2}{2}$$





Un condensador está compuesto por dos placas conductoras unidas por un material dieléctrico de tal manera de crear un campo eléctrico entre ambas placas conductoras. La característica sinusoidal de la corriente y la tensión hace que este campo eléctrico varié en el tiempo con el doble de la frecuencia de la onda de corriente. En otras palabras el condensador carga y descarga 2 veces la energía del campo eléctrico en él por cada periodo de la onda de tensión.

Del resultado anterior se puede ver que una carga puramente capacitiva no consume potencia activa, sino que al revés de una inductancia genera potencia reactiva generando un campo eléctrico.

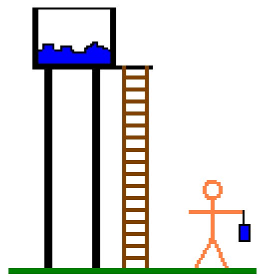
Efectivamente si comparamos el consumo de potencia reactiva realizada por un condensador puro con la de una inductancia pura, se puede observar que cuando un condensador descarga su campo eléctrico la inductancia carga su campo magnético, y viceversa cuando el condensador carga su campo eléctrico.

En otras palabras un condensador genera la potencia reactiva que consume una inductancia compensándola. En otras palabras dimensionando correctamente la capacidad C de un condensador se puede compensar el consumo de potencia reactiva por parte de un consumo inductivo que requieren para su funcionamiento.

El Jetón, el Balde y la Escalera

Una analogía de la Potencia Reactiva

Una forma de poder entender la potencia reactiva es mediante la analogía del jetón, el balde y la escalera. Imaginemos que se tiene un estanque de agua, una escalera, un balde de agua, y un Jetón dispuesto a llenar el estanque con un balde de agua. Como se muestra en la figura.



Entonces este Jetón para poder llenar el estanque de agua deberá subir la escalera con su balde de agua, llegar hasta arriba, vaciar el balde dentro del estanque y luego bajar. Entonces físicamente hablando el Jetón realizo trabajo, producto que la energía que uso para subir la escalera fue distinta que la que uso al bajar la escalera. En otras palabras el subir la escalera vaciar el balde y bajar nuevamente se tradujo en un consumo de potencia activa. Algo de lo cual alegremente le pagaremos a este Jetón por el **trabajo** que realizó.

Ahora imaginemos que a él Jetón se le olvidó llenar el balde de agua y sube la escalera, se da cuenta de la pelotudez que cometió y baja nuevamente a llenar el balde con agua para poder finalizar su labor. Estrictamente hablando, el Jetón esta vez no realizó **trabajo**, porque la energía que uso para subir fue igual a la que uso para bajar por la escalera pero en sentido opuesto. Esta vez por ningún motivo le pagaremos al Jetón por esta labor por qué no se realizó trabajo, no existió un consumo de potencia activa.

¿En qué se parece el acto del Jetón de subir la escalera con el balde vacio y luego bajar, con el concepto de Potencia Reactiva?

1. En que el Jetón no realizó trabajo al **subir** y **bajar** el balde vacío, al igual que la potencia Reactiva que oscila en torno a cero. O que **cargó** y **descargó** su campo magnético en el caso de una inductancia.
2. Que debió **subir** la escalera y luego **bajar** la escalera, al igual que la potencia reactiva que debió **cargar** y **descargar** su campo magnético.

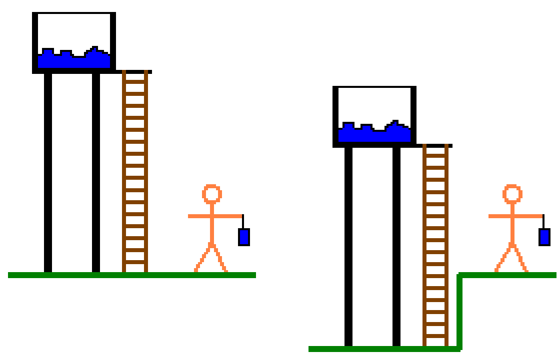
Entonces se puede apreciar que la potencia reactiva, es el símil de la potencia necesaria por el Jetón para poder subir la escalera, y así vaciar el balde, para luego bajar por la escalera. En otras palabras este actuar del Jetón de subir la escalera, vaciar el balde de agua, y luego bajar la escalera requirió de potencia activa para vaciar el agua (acto que **realiza** trabajo), y de potencia reactiva para poder subir y bajar la escalera (acto que **no realiza** trabajo).

¿Entonces que representa una resistencia, inductancia y una capacitancia en el ejemplo del Jetón, el balde, y la escalera?

¿Qué pasaría si el estanque de agua no estaría a la altura de la torre, sino a la altura del piso? No sería necesario subir y bajar la escalera que consume potencia reactiva, solo se realizaría el trabajo de vaciar el balde de agua, que solamente consume potencia activa. En otras palabras la resistencia en este ejemplo corresponde a vaciar el balde de agua en el estanque.

El Jetón cada vez que sube y baja la escalera está consumiendo potencia reactiva, al igual que una inductancia en un circuito de corriente alterna que carga y descarga su campo magnético. Entonces se podría decir que la escalera correspondería a la inductancia, en que entre mayor sea la longitud de esta escalera, mayor será la distancia que deberá subir y bajar el Jetón para poder llenar el estanque de agua. En otras palabras la escalera sería el símil de una inductancia.

Para poder entender el condensador en esta analogía, primero pensemos que sucedería si la altura de la torre se podría disminuir, sería necesario subir un tramo más corto de la escalera para poder vaciar el balde de agua. ¿Cómo se podría disminuir la altura del estanque de agua? Por ejemplo imaginemos que existiera un hoyo tal de que se disminuya la altura que debe subir el Jetón, como se muestra en la figura.



Entonces podríamos decir que el condensador se podría representar como un hoyo que disminuye la longitud de la escalera equivalente que debe subir y bajar el Jetón, para poder llenar el Estanque de agua.

Entonces se podría hacer un hoyo lo suficientemente profundo tal que la altura equivalente que deba subir el Jetón sea igual a cero, y por ende solo se esté consumiendo potencia activa al momento de llenar el estanque de agua.

En otras palabras el condensador ayuda a reducir el consumo de potencia reactiva mediante la generación de potencia reactiva. En otras palabras el condensador permite disminuir la longitud equivalente de la escalera tal que el Jetón no tenga que subir y bajar una distancia muy larga, lo cual se traduce en un consumo de potencia reactiva muy grande.

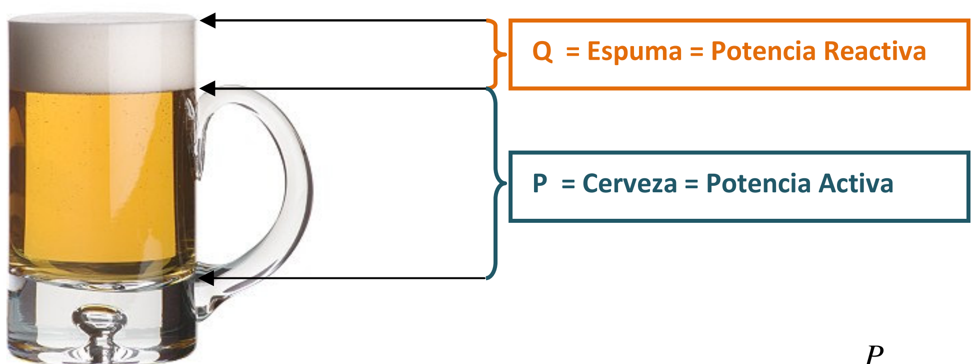
Como ven entonces la Potencia reactiva es la potencia necesaria para poder transmitir un flujo de potencia activa a una carga, desde la fuente de generación.

Factor de Potencia

Como sabemos en un sistema eléctrico existen cargas resistivas compuestas por hornos, luces incandescentes (ampolletas); y cargas inductivas compuestas en su mayoría por motores de inducción. Como se ha visto estas cargas inductivas están compuestas por bobinas e inductancias que consumen potencia reactiva. Esta potencia reactiva a la vez es necesaria para poder transportar la potencia activa que requieren las cargas. Sin embargo entre mayor sea la potencia reactiva consumida menor será la potencia activa que se podrá transmitir. En otras palabras esta potencia reactiva ocupa espacio. Para explicar esto se puede usar la analogía de la cerveza y la espuma.

Un vaso de cerveza está compuesto por dos componentes, la cerveza liquida que es la que importa y vale, por la cual uno paga, y la espuma de la cerveza que simplemente ocupa espacio y no permite tener más cerveza en el vaso, que es lo que le interesa al consumidor de cerveza.

El concepto de factor de potencia corresponde a la razón de potencia activa a la potencia total también denominada potencia aparente, o mejor dicho la razón de volumen de cerveza a volumen total del vaso. Lo anterior se muestra con la siguiente figura.



$$Factor\ de\ Potencia = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

En otras palabras la espuma es una molestia, y siempre se trata de disminuir la cantidad de espuma en el vaso o potencia reactiva consumida, para así poder aprovechar al máximo el volumen del vaso para poder consumir solamente cerveza.

Por este motivo existe un cargo en la cuenta de luz por factor de potencia, el cual se aplica cuando la razón de potencia activa a potencia total consumida es menor que un cierto valor. O en otras palabras cuando tu vaso de consumo de cerveza tiene una componente de espuma superior a lo permitido.