Profesor de Cátedra: Jorge Romo
Profesor Auxiliar: Lorenzo Reyes
loreyes@ing.uchile.cl

EL42C –Conversión Electromecánica de la Energía

Pauta Ejercicio 1 - Circuitos Magnéticos y Cálculo de Inductancias

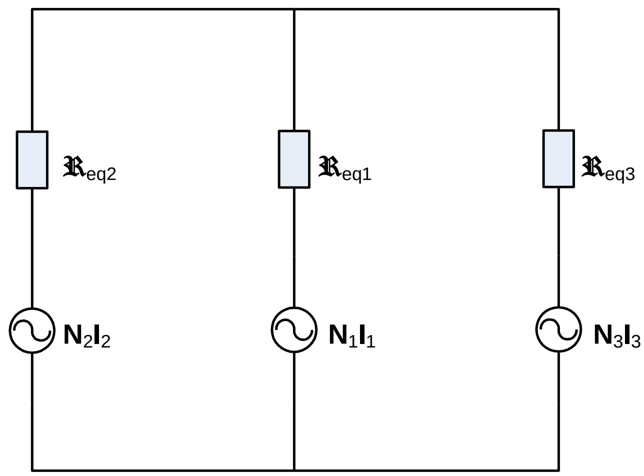
Problema 1

Pauta por: Gabriel Soublette C.

a) Recordando que la reluctancia $\mathcal{R}$ de un circuito magnético de permeabilidad μ, largo $l[m]$ y sección $A[m^2]$ es:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A}$$

Considerando el circuito magnético del problema, el cual posee en su columna central un espacio de $g[cm]$, el circuito de reluctancias reducido asociado al problema es el que se muestra en la siguiente figura:



Con:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{eq1} &= \frac{0.20 - g}{\mu \cdot 0{,}0025} + \frac{g}{\mu_0 \cdot 0{,}0025} = \frac{80}{\mu} + 400g\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right) \\
\mathcal{R}_{eq2} &= \frac{0.15 + 0.2 + 0.15}{\mu \cdot 0{,}0025} = \frac{200}{\mu} \\
\mathcal{R}_{eq3} &= \frac{0.15 + 0.2 + 0.15}{\mu \cdot 0{,}0025} = \frac{200}{\mu}
\end{aligned}$$

b) La matriz de inductancias L para el circuito de reluctancia anterior, posee la siguiente forma:

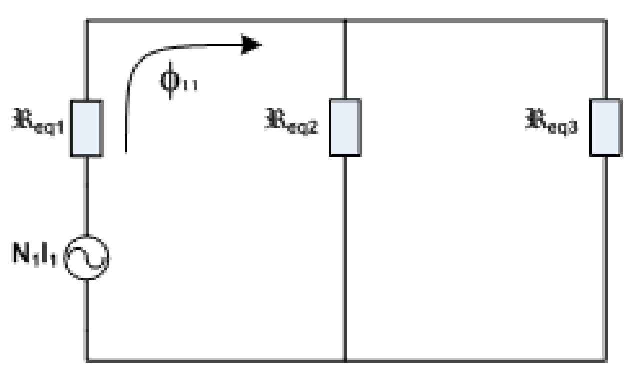
$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$$

Con:

$$\begin{aligned}
L_{jj} &= N_j^2/\mathcal{R}_{eqj} \\
L_{jk} &= N_j \; d\phi_{jk}/di_k
\end{aligned}$$

$i_1 \neq 0$ e $i_2 = i_3 = 0$:

$$\Rightarrow N_1 i_1 = \phi_{11}\left(\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq2}//\mathcal{R}_{eq3}\right)$$



Recordando de la parte a), se encontró que $\mathcal{R}_{eq2} = \mathcal{R}_{eq3}$, por lo tanto:

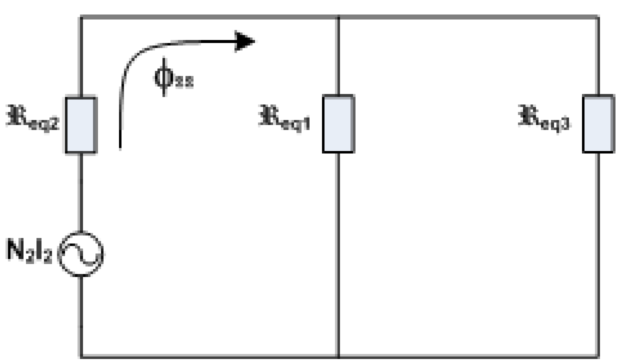
$$\frac{\phi_{11}}{i_1} = \frac{N_1}{\mathcal{R}_{eq1} + \frac{\mathcal{R}_{eq2}}{2}}$$

Además:

$$\phi_{21} = \phi_{31} = \frac{\phi_{11}}{2}$$

Entonces:

$$L_{11} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq2}/2}$$
$$L_{21} = \frac{N_1 N_2}{2(\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq2}/2)}$$
$$L_{31} = \frac{N_1 N_3}{2(\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq2}/2)}$$



$i_2 \neq 0$ e $i_1 = i_3 = 0$:

$$\Rightarrow N_2 i_2 = \phi_{22}\left(\mathcal{R}_{eq2} + \mathcal{R}_{eq1}//\mathcal{R}_{eq3}\right)$$

Por lo tanto:

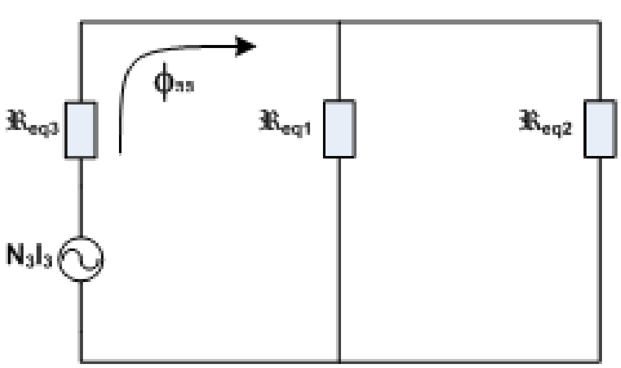
$$\frac{\phi_{22}}{i_2} = \frac{N_2}{\mathcal{R}_{eq2} + \mathcal{R}_{eq1}//\mathcal{R}_{eq3}}$$

Aplicando divisor de corriente:

$$\phi_{12} = \frac{\mathcal{R}_{eq3}}{\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq3}}\phi_{22}$$
$$\phi_{32} = \frac{\mathcal{R}_{eq1}}{\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq3}}\phi_{22}$$

Entonces:

$$L_{12} = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_{eq2} + \mathcal{R}_{eq1}//\mathcal{R}_{eq3}} \cdot \frac{\mathcal{R}_{eq3}}{\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq3}}$$
$$L_{22} = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_{eq2} + \mathcal{R}_{eq1}//\mathcal{R}_{eq3}}$$
$$L_{32} = \frac{N_2 N_3}{\mathcal{R}_{eq2} + \mathcal{R}_{eq1}//\mathcal{R}_{eq3}} \cdot \frac{\mathcal{R}_{eq1}}{\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq3}}$$



$i_3 \neq 0$ e $i_1 = i_2 = 0$:

$$\Rightarrow N_3 i_3 = \phi_{33}\left(\mathcal{R}_{eq3} + \mathcal{R}_{eq1}//\mathcal{R}_{eq2}\right)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\phi_{33}}{i_3} = \frac{N_3}{\mathcal{R}_{eq3} + \mathcal{R}_{eq1}//\mathcal{R}_{eq2}}$$

Profesor de Cátedra: Jorge Romo
Profesor Auxiliar: Lorenzo Reyes
loreyes@ing.uchile.cl

Aplicando divisor de corriente:

$$\phi_{13} = \frac{\mathcal{R}_{eq2}}{\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq2}} \phi_{33}$$
$$\phi_{23} = \frac{\mathcal{R}_{eq1}}{\mathcal{R}_{eq1} + \Re\mathcal{R}_{eq2}} \phi_{33}$$

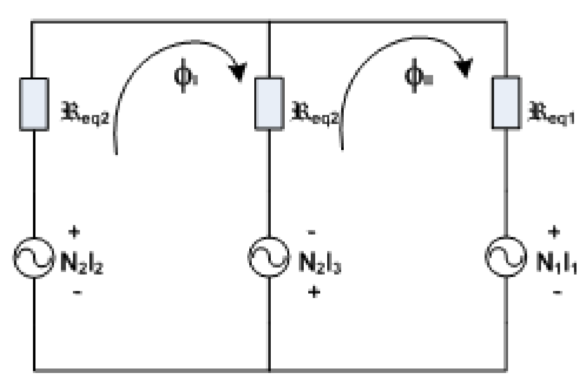
Entonces:

$$L_{13} = \frac{N_1 N_3}{\mathcal{R}_{eq3} + \mathcal{R}_{eq1}//\mathcal{R}_{eq2}} \frac{\mathcal{R}_{eq2}}{\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq2}}$$
$$L_{23} = \frac{N_2 N_3}{\mathcal{R}_{eq3} + \mathcal{R}_{eq1}//\mathcal{R}_{eq2}} \cdot \frac{\mathcal{R}_{eq1}}{\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq2}}$$
$$L_{33} = \frac{N_3}{\mathcal{R}_{eq3} + \mathcal{R}_{eq1}//\mathcal{R}_{eq2}}$$

Finalmente se encuentra la matriz de inductancia L del problema:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq2}/2} & \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_{eq2} + \mathcal{R}_{eq1}//\mathcal{R}_{eq3}} \frac{\mathcal{R}_{eq3}}{\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq3}} & \frac{N_1 N_3}{\mathcal{R}_{eq3} + \mathcal{R}_{eq1}//\mathcal{R}_{eq2}} \frac{\mathcal{R}_{eq2}}{\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq2}} \\ \frac{N_1 N_2}{2(\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq2}/2)} & \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_{eq2} + \mathcal{R}_{eq1}//\mathcal{R}_{eq3}} & \frac{N_2 N_3}{\mathcal{R}_{eq3} + \mathcal{R}_{eq1}//\mathcal{R}_{eq2}} \frac{\mathcal{R}_{eq1}}{\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq2}} \\ \frac{N_1 N_3}{2(\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq2}/2)} & \frac{N_2 N_3}{\mathcal{R}_{eq2} + \mathcal{R}_{eq1}//\mathcal{R}_{eq3}} \frac{\mathcal{R}_{eq1}}{\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq3}} & \frac{N_3}{\mathcal{R}_{eq3} + \mathcal{R}_{eq1}//\mathcal{R}_{eq2}} \end{bmatrix}$$

c) Considerando que $N_2 = N_3$, y además (de la parte a)) $\mathcal{R}_{eq2} = \mathcal{R}_{eq2}$, se tiene el siguiente circuito de reluctancia del problema:



Por LVK:

(1) $N_2 i_2 + N_2 i_3 = \mathcal{R}_{eq2}(2\phi_I - \phi_{II})$

(2) $-(N_2 i_3 + N_1 i_1) = \mathcal{R}_{eq2}(\phi_{II} - \phi_I) + \mathcal{R}_{eq1}\phi_{II}$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} N_2 i_2 + N_2 i_3 \\ -(N_2 i_3 + N_1 i_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathcal{R}_{eq2} & -\mathcal{R}_{eq2} \\ -\mathcal{R}_{eq2} & \mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_I \\ \phi_{II} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \phi_I \\ \phi_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathcal{R}_{eq2} & -\mathcal{R}_{eq2} \\ -\mathcal{R}_{eq2} & \mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_2 i_2 + N_2 i_3 \\ -(N_2 i_3 + N_1 i_1) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \phi_I \\ \phi_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(i_2(\mathcal{R}_{eq1}+\mathcal{R}_{eq2}) + i_3\mathcal{R}_{eq1})N_2 - i_1\mathcal{R}_{eq2}N_2}{(2\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq2})\mathcal{R}_{eq2}} \\ \frac{(i_2 - i_3)N_2 - 2i_1 N_1}{2\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq2}} \end{bmatrix}$$

Notando que, para este problema, se tendrá que el voltaje inducido en la bobina 1 es $v_1 = N_1 \frac{d\phi_{II}}{dt}$. Además, como nos interesa el voltaje inducido por las corrientes i_2 y i_3 , asumiremos que esta es nula:

$$\Rightarrow \quad \phi_{II} = \frac{(i_2 - i_3)N_2}{2\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq2}} \qquad \Rightarrow \quad v_1(t) = \frac{N_1 N_2}{2\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq2}} \left(\frac{di_2}{dt} - \frac{di_3}{dt} \right)$$

Viendo el resultado fasorialmente:

$$\dot{V}_1 = \frac{N_1 N_2}{2\mathcal{R}_{eq1} + \mathcal{R}_{eq2}} j\omega \left(\dot{I}_2 - \dot{I}_3 \right)$$

Lo cual concluye que $\dot{V}_1$ es un voltaje que puede ser usado para medir el desbalance entre dos señales sinusoidales de la misma frecuencia.