

PL1

a) $y[n] = x[n] \cdot \cos(\omega_0 n)$

$$y[n-n_0] = x[n-n_0] \cdot \cos(\omega_0 (n-n_0)) \neq x[n-n_0] \cos(\omega_0 n) \rightarrow \text{NO es LTI.}$$

b) $z^n \rightarrow \boxed{\text{LTI}} \rightarrow y[n] = h[n] \otimes z^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k}$

$$= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}$$

$\uparrow$ auto-frecuencia $\uparrow$ auto-valor

 c) Una función se dice "suave" en función del número de derivadas continuas que tenga. Si $f \in C^p[0,1]$, a mayor $p \in \mathbb{Z}$ mayor suavidad. Si una función f más suave entonces $S_n(t)$ converge en forma más rápida a $f(t)$. Específicamente, si $f \in C^p[0,1]$ entonces $\|S_n - f\|_{\infty} \leq \text{constante} \times n^{-p+1/2}$.

 d) El principio de incertidumbre dice que si una señal se encuentra bien localizada en el tiempo entonces se encontrará dispersa en frecuencia, y vice versa. Por ejemplo, $\delta(t)$ se encuentra perfectamente localizada en el tiempo, no así en CFTF, $\hat{f}\{\delta(t)\} = 1$.

e) • $Y(\omega) = \frac{2\omega^2}{H(\omega)} X(\omega) = H(\omega) X(\omega) \Rightarrow \text{es LTI.}$

• $Y(\omega) = e^{j\omega_0 t} X(\omega) + X(\pi) \delta(\omega - \pi) = (e^{j\omega_0 t} + \delta(\omega - \pi)) X(\omega) \Rightarrow \text{es LTI.}$

• $Y(\omega) = X(\omega - 2\pi) \leftarrow \text{no se puede escribir como } H(\omega) X(\omega) \Rightarrow \text{NO es LTI.}$

f) 1. Filtros FIR siempre son estables, no así un filtro IIR.

2. Filtro FIR puede obtener una respuesta lineal en la fase, que no distorsiona la señal de entrada. Este efecto es imposible de lograr mediante un filtro IIR.

P2]

a) Consideramos $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$

$$\Rightarrow y[n] = T[x[n]] = T\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \underbrace{T[e^{j\Omega n}]}_{\text{lineal}} d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) g[n] e^{j\Omega n} d\Omega = \underbrace{g[n]}_{\text{F.I.}} x[n]$$

b) Cualquier señal $x[n]$ es auto-secuencia de un sistema LFI y $g[n]$ es el valor propio asociado.

Para que un sistema LFI sea TI $g[n] = \text{constante}$.

$$\left. \begin{aligned} c) \quad & X(\Omega) \rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \rightarrow Y(\Omega) \\ & X(\Omega - \Omega_0) \rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \rightarrow Y(\Omega - \Omega_0) \end{aligned} \right\} \text{Sistema F.I.}$$

$$\delta(\Omega) \rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \rightarrow G(\Omega) \leftarrow \text{respuesta a la constante}$$

$$\begin{aligned} d) \quad Y(\Omega) &= T[X(\Omega)] = T\left[\int_{-\pi}^{\pi} X(\tilde{\Omega}) \delta(\Omega - \tilde{\Omega}) d\tilde{\Omega}\right] \quad \downarrow \text{lineal} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} X(\tilde{\Omega}) T[\delta(\Omega - \tilde{\Omega})] d\tilde{\Omega} \quad \downarrow \text{F.I.} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} X(\tilde{\Omega}) G(\Omega - \tilde{\Omega}) d\tilde{\Omega} = X(\Omega) \otimes G(\Omega) \end{aligned}$$

$$e) \text{ Sea } w[n] \xleftrightarrow{\tilde{F}} W(\Omega)$$

$$|W(\Omega)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n] e^{-j\Omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |w[n]|, \text{ luego } w \in \ell_1(\mathbb{Z}) \Rightarrow |W(\Omega)| < \infty$$

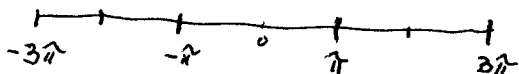
Luego, una condición necesaria para tener estabilidad BIFBOF es $x \in \ell_1(\mathbb{Z}) \Rightarrow y \in \ell_1(\mathbb{Z})$

f) En frecuencia la estabilidad BIFBOF es idéntica a la estabilidad BIBO de un sistema de tiempo continuo, luego:

$$\text{LFI BIFBOF} \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |G(\Omega)| d\Omega < \infty \quad (G \in L^1(-\pi, \pi])$$

P3]

$$\begin{aligned} a) \quad y[m] &= x[3m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega 3m} d\Omega \\ &= \frac{1}{6\pi} \int_{-3\pi}^{3\pi} X\left(\frac{\tilde{\Omega}}{3}\right) e^{j\tilde{\Omega} m} d\tilde{\Omega} \quad \left. \begin{aligned} \tilde{\Omega} &= 3\Omega \\ d\tilde{\Omega} &= 3d\Omega \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \frac{1}{6\pi} \sum_{k=-L}^L \int_{-\pi-k2\pi}^{\pi-k2\pi} X\left(\frac{\tilde{\Omega}}{3}\right) e^{j\tilde{\Omega} m} d\tilde{\Omega} \quad \left. \begin{aligned} \Omega &= \tilde{\Omega} + k2\pi \\ d\Omega &= d\tilde{\Omega} \end{aligned} \right\} \\ &= \frac{1}{6\pi} \sum_{k=-L}^L \int_{-\pi}^{\pi} X\left(\frac{\Omega - k2\pi}{3}\right) e^{j(\Omega - k2\pi)m} d\Omega \\ &= e^{j\Omega m} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\left[\frac{1}{3} \sum_{k=-1}^1 X\left(\frac{\Omega - k 2\pi}{3}\right) \right]}_{Y(\Omega)} e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$\Rightarrow Y(\Omega) = \frac{1}{3} \left\{ \underbrace{X\left(\frac{\Omega - 2\pi}{3}\right)}_{\textcircled{1}} + \underbrace{X\left(\frac{\Omega}{3}\right)}_{\textcircled{2}} + \underbrace{X\left(\frac{\Omega + 2\pi}{3}\right)}_{\textcircled{3}} \right\} \parallel$$

Si existe traslape entre $\textcircled{1}$ y $\textcircled{2}$, y $\textcircled{2}$ y $\textcircled{3}$, entonces $Y(\Omega)$ está confundiendo varias frecuencias y existe aliasing.

b) Si $X(\Omega) = 0$ para $\Omega \in (-\pi, \pi/3] \cup (\pi/3, \pi]$ (a intervalos de 2π) no existe traslape entre $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ y $\textcircled{3}$ y se evita el fenómeno de aliasing, permitiendo una relación unívoca entre $X(\Omega)$ y $Y(\Omega)$.

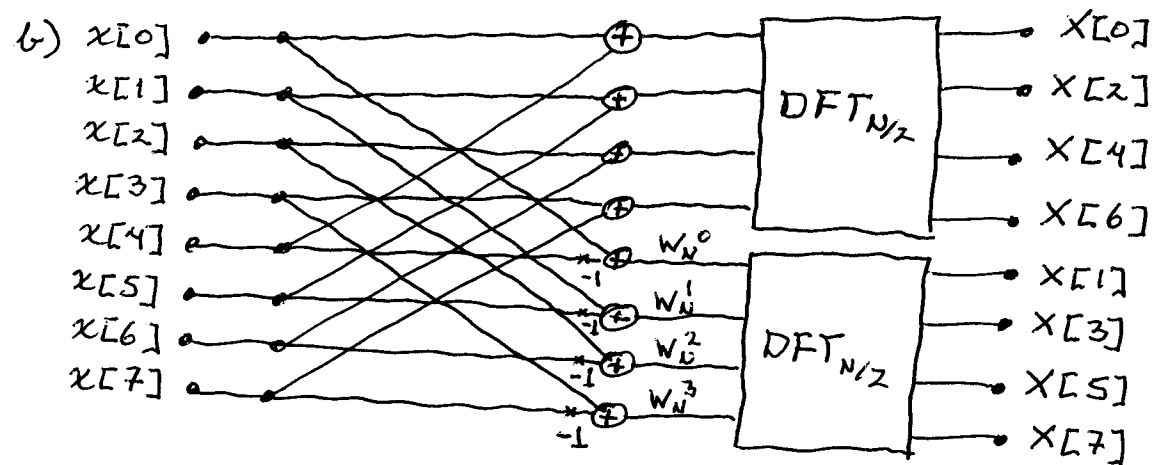
$$\Rightarrow X(\Omega) = \begin{cases} 3Y(3\Omega) & \Omega \in (-\pi/3, \pi/3) \text{ (a intervalos de } 2\pi) \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x[n] &= \frac{3}{2\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \underbrace{Y(3\Omega)}_{\sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] e^{-j3\Omega k}} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{3}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] \underbrace{\int_{-\pi/3}^{\pi/3} e^{j\Omega(n-3k)} d\Omega}_{\left[\frac{e^{j\Omega(n-3k)}}{j(n-3k)} \right]_{-\pi/3}^{\pi/3}} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] W[n-3k] \parallel \end{aligned}$$

P4]

$$\begin{aligned} a) X[2k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{4\pi n k}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] e^{-j \frac{4\pi n k}{N}} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x\left[n + \frac{N}{2}\right] \underbrace{e^{-j \frac{4\pi (n + \frac{N}{2}) k}{N}}}_{e^{-j \frac{4\pi n k}{N}}} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n + \frac{N}{2}]) e^{-j \frac{2\pi n k}{N/2}} \\ &= \text{DFT}_{N/2} \left\{ x[n] + x\left[n + \frac{N}{2}\right] \right\} \parallel \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X[2k+1] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi n (2k+1)}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + \underbrace{W_N^{N/2}}_{-1} x[n + \frac{N}{2}]) W_N^{(2k+1)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] - x[n + \frac{N}{2}]) W_N^n W_{N/2}^{kn} \\ &= \text{DFT}_{N/2} \left\{ (x[n] - x[n + \frac{N}{2}]) W_N^n \right\} \parallel \end{aligned}$$



c) MULTIPLICACIONES: (existen $\log_2 N$ etapas)

$$\sum_{k=1}^{\log_2 N} \frac{N}{2^k} \times k = \frac{N}{2} \log_2 N$$

↑
de bloques DFT

SOMAS: $N \log_2 N$