

Examen

EL41C – Análisis de Señales

Fecha: 1 de Diciembre de 2009

1. Responda las siguientes preguntas fundamentando siempre su respuesta:

- (a) De un ejemplo explícito de un sistema lineal que **no** sea invariante en el tiempo y explique por qué no se tiene esta última propiedad.
- (b) Demuestre que las secuencias $x[n] = z^n$, $z \in \mathbb{C}$, son auto-secuencias de un sistema LTI de tiempo discreto, $n \in \mathbb{Z}$, y encuentre los auto-valores del sistema en función de la respuesta al impulso del sistema, $h[n]$.
- (c) Describa la convergencia de la serie de Fourier para funciones continuas según su grado de suavidad.
- (d) Explique cualitativamente el principio de incertidumbre de Heisenberg e ilustre su explicación mediante una señal específica.
- (e) Considere un sistema con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$. La entrada es una señal cualquiera que no tiene ninguna relación con el sistema. Señale en cuáles de los siguientes casos el sistema es LTI
 - $Y(\omega) = 2\omega^2 X(\omega)$
 - $Y(\omega) = e^{j\omega t_0} X(\omega) + X(\pi)\delta(\omega - \pi)$
 - $Y(\omega) = X(\omega - 2\pi)$
- (f) Explique 2 ventajas de diseñar un filtro mediante un sistema FIR con respecto a usar un sistema IIR.

2. Considere un sistema discreto con $n \in \mathbb{Z}$. Se define la propiedad de **invariancia en la frecuencia** (o *frequency invariant*, abreviado FI) para sistemas que cumplan con

Un sistema es *invariante en la frecuencia* si



$\Rightarrow$



- (a) Considere un sistema **lineal e invariante en la frecuencia**, abreviado LFI. Se define la *señal respuesta a la constante*, $g[n]$, como la salida del sistema a la entrada $x[n] = 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Encuentre una expresión cerrada (sin sumas ni integrales) de la salida, $y[n]$, de un sistema LFI a una entrada arbitraria, $x[n]$, asumiendo conocida la señal respuesta a la constante.

Pista: considere la señal de entrada escrita como una transformada inversa de Fourier.

- (b) Encuentre las auto-secuencias de un sistema LFI y los auto-valores asociados. ¿Qué condición debe cumplir la señal respuesta a la constante, $g[n]$, para que un sistema LFI sea invariante en el tiempo?
- (c) Escriba las definiciones de un sistema FI y de la señal respuesta a la constante, en términos de la transformada de Fourier de la entrada, $X(\Omega)$, y de la salida, $Y(\Omega)$.
- (d) Ahora asuma conocida la transformada de Fourier de la señal respuesta a la constante, $G(\Omega)$. Encuentre una expresión que relacione la transformada de Fourier de la salida, $Y(\Omega)$, con la transformada de Fourier de una entrada arbitraria, $X(\Omega)$.

Pista: considere el desarrollo de $X(\Omega)$ en tren de pulsos continuo entre $-\pi$ y π (usando delta de Dirac).

- (e) Un sistema se denomina **estable en el sentido BIFBOF** (*bounded input in frequency bounded output in frequency*) si

$$|X(\Omega)| < \infty \quad \forall \Omega \in (-\pi, \pi) \quad \Rightarrow \quad |Y(\Omega)| < \infty \quad \forall \Omega \in (-\pi, \pi)$$

Escriba una condición necesaria en el dominio del tiempo para tener estabilidad BIFBOF.

- (f) ¿Qué condición deben cumplir $G(\Omega)$ para que un sistema LFI sea estable en el sentido BIFBOF?

3. Considere una señal discreta, $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$. A partir de esta señal se construye una nueva señal con una cada tres muestras. Esto es, $y[m] = x[3m]$ con $m \in \mathbb{Z}$.

- (a) Encuentre una fórmula cerrada (sin sumatorias) que relacione la DTFT de $y[m]$, $Y(\Omega)$, con la DTFT de $x[n]$, $X(\Omega)$. Indique cómo esta fórmula hace aparecer el fenómeno de aliasing en frecuencia.
- (b) Suponga que dentro del intervalo $(-\pi, \pi]$ se tiene que $X(\Omega) = 0$ para $\Omega \in (-\pi, -\pi/3) \cup (\pi/3, \pi]$, y lo mismo se tiene a intervalos regulares de largo 2π . Explique por qué en este caso es posible reconstruir la señal completa $x[n]$ a partir de un subconjunto de sus muestras en $y[n]$ y encuentre la fórmula de reconstrucción perfecta. Escriba su respuesta en función de

$$W[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{3} n)}{\frac{\pi}{3} n}$$

4. Considere una señal discreta y finita, $x[n]$, $n = 0, \dots, N - 1$, con N par. Se quiere calcular $X[k] = DFT_N\{x[n]\}$, $k = 0, \dots, N - 1$, para lo cual se siguen los siguientes pasos:

- (a) Demuestre que:

$$X[2k] = DFT_{\frac{N}{2}} \left\{ x[n] + x\left[n + \frac{N}{2}\right] \right\}$$

$$X[2k + 1] = DFT_{\frac{N}{2}} \left\{ (x[n] - x\left[n + \frac{N}{2}\right]) W_N^n \right\}$$

donde $k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$, y $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.

- (b) Se quiere calcular $X[k]$ para $N = 8$ pero solo se dispone de bloques que calculan la DFT de 4 puntos, DFT_4 . Usando el resultado en (4a) dibuje un diagrama de bloques en que se calcule la DFT de una señal de 8 puntos utilizando dos bloques DFT_4 .
- (c) Calcule el número de multiplicaciones y sumas que requiere el cálculo de la DFT si se aplica recursivamente el sistema anterior para un caso general en que N es una potencia de 2.

Transformada CTFT (Continuous Time Fourier Transform):

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de frecuencia
Notación	$x(t)$	$X(\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(\omega)$
Lineal	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$
Desplazamiento Temporal	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
Desplazamiento en Frecuencia	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Inversión Temporal	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Multiplicación	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$
Derivada Temporal	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Derivada en Frecuencia	$tx(t)$	$j \frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Integral	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Escalamiento	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Dualidad	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Simetría	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(\omega) = X^*(-\omega)$
	$x(t)$ real y par	$X(\omega)$ real y par
	$x(t)$ real e impar	$X(\omega)$ imaginario puro e impar
Teorema de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(t)x_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1^*(\omega)X_2(\omega)d\omega$	
Principio de Incertidumbre	Si $\int_{-\infty}^{\infty} t x(t) ^2 dt = 0$ entonces	
	$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 x(t) ^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 X(\omega) ^2 d\omega \geq \frac{\pi}{2} \ x\ ^4$	
	y la igualdad se da si y solo si $x(t) = a \exp(- b t^2)$, $a \in \mathbb{R}$	

Transformada DTFT (Discrete Time Fourier Transform):

$$H(\Omega) = \mathcal{F}\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n} \quad h[n] = \mathcal{F}^{-1}\{H(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$$

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de frecuencia
Notación	$x[n]$	$X(\Omega)$
	$x_1[n]$	$X_1(\Omega)$
	$x_2[n]$	$X_2(\Omega)$
Lineal	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega)$
Desplazamiento Temporal	$x[n - n_0]$	$e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$
Desplazamiento en Frecuencia	$e^{j\Omega_0 n} x[n]$	$X(\Omega - \Omega_0)$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
Inversión Temporal	$x[-n]$	$X(-\Omega)$
Convolución	$x_1[n] \otimes x_2[n]$	$X_1(\Omega)X_2(\Omega)$
Multiplicación	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\Omega - \lambda)d\lambda$
Modulación	$x[n] \cos(\Omega_0 n)$	$\frac{1}{2}X(\Omega + \Omega_0) + \frac{1}{2}X(\Omega - \Omega_0)$
Diferenciación Temporal	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - e^{-j\Omega})X(\Omega)$
Derivada en Frecuencia	$nx[n]$	$j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega)$ $+ \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$
Simetría	$x[n] \in \mathbb{R}$	$X(\Omega) = X^*(-\Omega)$
	$x[n]$ real y par	$X(\Omega)$ real y par
	$x[n]$ real e impar	$X(\Omega)$ imaginario puro e impar
Teorema de Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1^*[n]x_2[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1^*(\Omega)X_2(\Omega)d\Omega$	

Transformada DFT (Discrete Fourier Transform):

$$H[k] = DFT_N \{h[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad h[n] = IDFT_N \{H[k]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de frecuencia
Notación	$x[n]$	$X[k]$
	$x_1[n]$	$X_1[k]$
	$x_2[n]$	$X_2[k]$
Lineal	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
Desplazamiento Temporal	$x[(n-l)_N]$	$X[k]e^{-j2\pi kl/N}$
Desplazamiento en Frecuencia	$x[n]e^{j2\pi ln/N}$	$X[(k-l)_N]$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*[N-1-k]$
Inversión Temporal	$x[N-1-n]$	$X[N-1-k]$
Convolución	$x_1[n] \otimes_N x_2[n]$	$X_1[k]X_2[k]$
Multiplicación	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N}X_1[k] \otimes_N X_2[k]$
Simetría	$x[n] \in \mathbb{R}$	$X[k] = X^*[N-k]$
	$x[n]$ real y par	$X[k]$ real y par
	$x[n]$ real e impar	$X[k]$ imaginario puro e impar
Teorema de Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]x_2^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1[k]X_2^*[k]$	