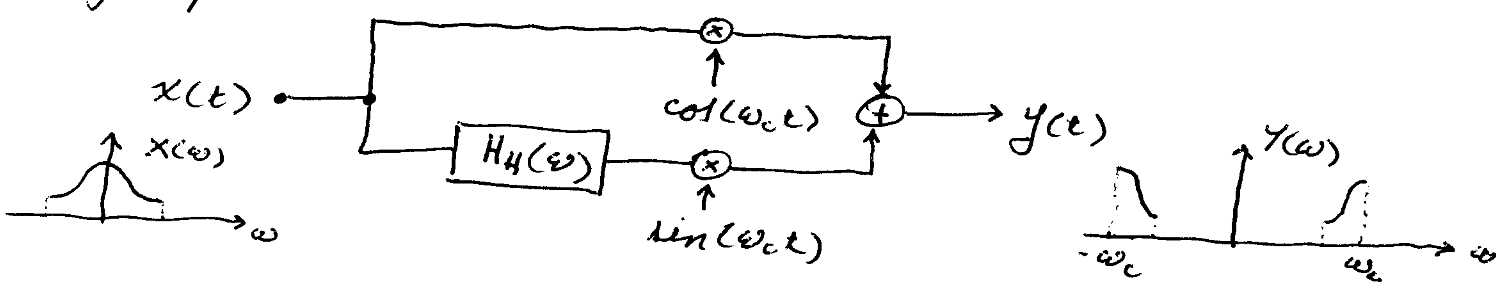
PI

a) La transformada de Hilbert actúa como un filtro pasa-todo, es decir, no afecta la amplitud de ninguna componente de frecuencia. Cambia una señal al producir un desfase distinto en las frecuencias positivas y negativas.

b) Lo podemos utilizar para modular una señal $x(t)$ en AM suprimiendo una de las bandas laterales. Por ejemplo:



c) * El sistema de modulación AM es más sencillo que FM, y se puede transmitir incluso si geográficamente el receptor no puede ver al transmisor pues las ondas electromagnéticas se transmiten por la superficie. Su desventaja es que es más susceptible al ruido que FM pues este afecta directamente la amplitud y su efecto no es tan negativo en la frecuencia (→ cruces por cero).

d) No, un filtro FIR siempre será estable en el sentido BIBO pues $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$.

e) Una señal de tiempo continuo puede oscilar a una frecuencia arbitrariamente grande, sin embargo una señal discreta puede oscilar a lo más como $(-1)^n$ estableciendo un límite en $\Omega = \pm\pi$. Al discretizar una señal que oscile más rápido se produce el fenómeno de aliasing.

f) El fenómeno de aliasing se da, por ejemplo, cuando tratamos de reconocer un objeto que observamos a través de una persiana. Si al ir cerrando la persiana no logramos distinguir si el objeto observado es A o B se dice que hay "aliasing" entre A y B. A es un alias de B y vice versa.

P2]

a) $H(\Omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j\Omega_k n} = H_k$

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{M-1} a_{kn} h[n] = b_k$ donde $a_{kn} = e^{-j\Omega_k n}$, $b_k = H_k$

La matriz $A = [a_{kn}]$ es invertible pues, dado que $\Omega_k \neq \Omega_j$ si $k \neq j$, las señales $e^{-j\Omega_k n}$ son l.i.

b) $H(\Omega_k) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-j\Omega_k n} = \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n] \{e^{-j\Omega_k n} + e^{-j\Omega_k (M-n-1)}\}$

$$= e^{-j\Omega_k \frac{M-1}{2}} \{ \underbrace{2\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n] \cos\left(\Omega_k\left(\tfrac{M-1}{2} - n\right)\right)}_{A_k} \}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a_{kn} &= \cos\left(\Omega_k\left(\tfrac{M-1}{2} - n\right)\right) \\ b_k &= \tfrac{1}{2} A_k \end{aligned}}$$

$\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} a_{kn} h[n] = b_k \quad k = 0, \dots, \frac{M}{2}-1 \quad \Rightarrow h[n],\ n = 0, \dots, \frac{M}{2}-1$

La matriz $A = [a_{kn}]$ es invertible pues, dado que $\Omega_k \neq \Omega_j$ si $k \neq j$, las señales $\cos(\Omega_k(\frac{M-1}{2} - n))$ son l.i.

El resto de los coeficientes se calculan usando la condición de simetría par:

$h[M-1-k] = h[k] \quad k = 0, \dots, \frac{M}{2}-1$

P3]

a) $y[m] = x[2m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}(2m)k}$

$$= \frac{1/2}{N/2} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N/2}mk} + \frac{1/2}{N/2} \sum_{k=\frac{N}{2}}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N/2}mk}$$

$$= \frac{1/2}{N/2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} X[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N/2}mk} + \frac{1/2}{N/2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} X[k+\tfrac{N}{2}]\, \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{N/2}m(k+\frac{N}{2})}}_{=e^{j\frac{2\pi}{N/2}mk}}$$

$$= \frac{1}{2}\, IDFT_{N/2}\left\{X[k] + X[k+\tfrac{N}{2}]\right\}$$

$$\Rightarrow \quad Y[k] = \frac{1}{2}\left\{X[k] + X[k+\tfrac{N}{2}]\right\} \qquad k = 0, \dots, \tfrac{N}{2}-1$$

Si existe traslape entre $X[k]$ y $X[k+\frac{N}{2}]$ entonces $Y[k]$ confunde dos componentes de frecuencia en una. Estas dos frecuencias son un alias.

b) Si $X[k] = 0$, $k = \frac{N}{2}, \dots, N-1$ entonces $X[k+\frac{N}{2}] = 0$, $k = 0, \dots, \frac{N}{2}-1$ y se evita el fenómeno de aliasing, permitiendo una relación unívoca entre $X[k]$ e $Y[k]$.

$$\Rightarrow \quad X[k] = \begin{cases} 2\,Y[k] = 2\sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m]\, e^{-j\frac{2\pi}{N/2}mk} & k = 0, \dots, \frac{N}{2}-1 \\ 0 & k = \frac{N}{2}, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x[n] = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m]\, e^{-j\frac{2\pi}{N/2}mk}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= \frac{2}{N}\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m]\, \underbrace{\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(n-2m)k}}_{W[n-2m]}$$

$$\Rightarrow \quad x[n] = \frac{2}{N}\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2m]\, W[n-2m]$$