

Control 3

EL41C – Análisis de Señales

Fecha: 13 de Noviembre de 2009

1. Responda las siguientes preguntas fundamentando siempre su respuesta:

- (a) ¿Qué frecuencias deja pasar la transformada de Hilbert? ¿Cómo cambia una señal?
- (b) Si disponemos de un sistema que calcula la transformada de Hilbert, ¿para qué y cómo lo podemos utilizar?
- (c) Compare ventajas y desventajas de un sistema de comunicación inalámbrico que utilice modulación AM o FM
- (d) ¿Puede un sistema LTI discreto e infinito que representa un filtro FIR **no** ser estable en el sentido BIBO?
- (e) ¿Por qué el dominio de la transformada de Fourier de una señal continua, $x(t)$, abarca todas las frecuencias desde $-\infty$ e ∞ y la transformada de Fourier de una señal discreta, $x[n]$, solo abarca las frecuencias entre $-\pi$ y π ?
- (f) ¿Qué significa el concepto de **aliasing**? Explique a través de una situación cotidiana y sin hacer uso de conceptos técnicos (p.ej.: función, frecuencia, transformada de Fourier, etc.).

2. Se desea diseñar un filtro digital FIR de largo M de acuerdo a los siguientes criterios:

- (a) Que la respuesta en frecuencia compleja (tanto la amplitud como la fase) sea exactamente la que se especifica en un conjunto de M frecuencias distintas y no necesariamente equiespaciadas. Esto es, se conocen $H_k = H(\Omega_k)$, $k = 0, \dots, M-1$, para $0 < \Omega_k < \pi$ y tal que $\Omega_k \neq \Omega_j$ si $k \neq j$. Encuentre un sistema de M ecuaciones lineales cuya solución entregue los coeficientes $h[n]$ del filtro digital. ¿Siempre tiene solución este sistema? ¿Por qué?
- (b) Ahora se pide que el filtro FIR sea de largo M par, simétrico y de coeficientes reales, para asegurar una respuesta lineal en la fase. Luego, se especifica que la amplitud de la respuesta en frecuencia sea exactamente la que se especifica en un conjunto de $M/2$ frecuencias distintas y no necesariamente equiespaciadas. Esto es, se conocen $A_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, \frac{M}{2} - 1$, tal que $H(\Omega_k) = A_k e^{j\angle H(\Omega_k)}$, $0 < \Omega_k < \pi$ y tal que $\Omega_k \neq \Omega_j$ si $k \neq j$. Encuentre un sistema de $M/2$ ecuaciones lineales cuya solución entregue los coeficientes $h[n]$ del filtro digital para $n = 0, \dots, \frac{M}{2} - 1$. ¿Cómo se determinan los restantes $M/2$ coeficientes del filtro?

3. Considere una señal discreta y finita, $x[n]$, $n = 0, \dots, N-1$, donde $N \in \mathbb{Z}$ es un número par. A partir de esta señal se construye una señal con la mitad de las muestras, considerando las muestras pares de $x[n]$. Esto es, $y[m] = x[2m]$ con $m = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$.
- (a) Encuentre una fórmula cerrada (sin sumatorias) que relacione la DFT de $y[m]$, $Y[k]$ con $k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$, con la DFT de $x[n]$, $X[k]$ con $k = 0, \dots, N-1$. Indique cómo esta fórmula hace aparecer el fenómeno de aliasing en frecuencia.
- (b) Suponga que $X[k] = 0$ para $k = \frac{N}{2}, \dots, N-1$. Explique por qué en este caso es posible reconstruir la señal completa $x[n]$ a partir de sus muestras pares $y[n]$ y encuentre la fórmula de reconstrucción perfecta. Escriba su respuesta en función de

$$W[n] = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = e^{j\pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{N})n} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N}n\right)}$$

Transformada CTFT (Continuous Time Fourier Transform):

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de frecuencia
Notación	$x(t)$	$X(\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(\omega)$
Lineal	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$
Desplazamiento Temporal	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
Desplazamiento en Frecuencia	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Inversión Temporal	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Multiplicación	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$
Derivada Temporal	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Derivada en Frecuencia	$tx(t)$	$j \frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Integral	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Escalamiento	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Dualidad	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Simetría	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(\omega) = X^*(-\omega)$
	$x(t)$ real y par	$X(\omega)$ real y par
	$x(t)$ real e impar	$X(\omega)$ imaginario puro e impar
Teorema de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(t)x_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1^*(\omega)X_2(\omega)d\omega$	
Principio de Incertidumbre	Si $\int_{-\infty}^{\infty} t x(t) ^2 dt = 0$ entonces $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 x(t) ^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 X(\omega) ^2 d\omega \geq \frac{\pi}{2} \ x\ ^4$ y la igualdad se da si y solo si $x(t) = a \exp(- b t^2)$, $a \in \mathbb{R}$	

Transformada DTFT (Discrete Time Fourier Transform):

$$H(\Omega) = \mathcal{F}\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n} \quad h[n] = \mathcal{F}^{-1}\{H(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega)e^{j\Omega k} d\Omega$$

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de frecuencia
Notación	$x[n]$	$X(\Omega)$
	$x_1[n]$	$X_1(\Omega)$
	$x_2[n]$	$X_2(\Omega)$
Lineal	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega)$
Desplazamiento Temporal	$x[n - n_0]$	$e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$
Desplazamiento en Frecuencia	$e^{j\Omega_0 n} x[n]$	$X(\Omega - \Omega_0)$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
Inversión Temporal	$x[-n]$	$X(-\Omega)$
Convolución	$x_1[n] \otimes x_2[n]$	$X_1(\Omega)X_2(\Omega)$
Multiplicación	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\Omega - \lambda)d\lambda$
Modulación	$x[n] \cos(\Omega_0 n)$	$\frac{1}{2}X(\Omega + \Omega_0) + \frac{1}{2}X(\Omega - \Omega_0)$
Diferenciación Temporal	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - e^{-j\Omega})X(\Omega)$
Derivada en Frecuencia	$nx[n]$	$j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega)$
		$+\pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$
Simetría	$x[n] \in \mathbb{R}$	$X(\Omega) = X^*(-\Omega)$
	$x[n]$ real y par	$X(\Omega)$ real y par
	$x[n]$ real e impar	$X(\Omega)$ imaginario puro e impar
Teorema de Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1^*[n]x_2[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1^*(\Omega)X_2(\Omega)d\Omega$	

Transformada DFT (Discrete Fourier Transform):

$$H[k] = DFT_N \{h[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad h[n] = IDFT_N \{H[k]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de frecuencia
Notación	$x[n]$	$X[k]$
	$x_1[n]$	$X_1[k]$
	$x_2[n]$	$X_2[k]$
Lineal	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
Desplazamiento Temporal	$x[(n-l)_N]$	$X[k]e^{-j2\pi kl/N}$
Desplazamiento en Frecuencia	$x[n]e^{j2\pi ln/N}$	$X[(k-l)_N]$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*[N-1-k]$
Inversión Temporal	$x[N-1-n]$	$X[N-1-k]$
Convolución	$x_1[n] \otimes_N x_2[n]$	$X_1[k]X_2[k]$
Multiplicación	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N}X_1[k] \otimes_N X_2[k]$
Simetría	$x[n] \in \mathbb{R}$	$X[k] = X^*[N-k]$
	$x[n]$ real y par	$X[k]$ real y par
	$x[n]$ real e impar	$X[k]$ imaginario puro e impar
Teorema de Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]x_2^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1[k]X_2^*[k]$	