

Control 2

EL41C – Análisis de Señales

Fecha: 16 de Octubre de 2009

1. Responda las siguientes preguntas fundamentando siempre su respuesta:

(a) Describa el fenómeno de Gibbs para la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } -\frac{1}{2} < t \leq 0 \end{cases}$$

(b) Describa la convergencia de la serie de Fourier para funciones continuas según su grado de suavidad

(c) Demuestre que si una señal $x(t)$ es real e impar entonces $X(\omega)$ es imaginario puro e impar

(d) Explique cómo se cumple el principio de incertidumbre para las señales $x(t) = \delta(t)$ y $x(t) = 1$

(e) Considere un sistema con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$. La entrada es una señal cualquiera que no tiene ninguna relación con el sistema. Señale en cuáles de los siguientes casos el sistema es LTI

- $Y(\omega) = 2 (\omega X(\omega))^2$
- $Y(\omega) = e^{j\omega t_0} X(\omega) + X(0)\delta(\omega)$
- $Y(\omega) = X(\omega/4)$

(f) Explique las condiciones que debe cumplir una señal modulada en AM-DSB para poder implementar un demulador asíncrono por medio de un detector de envolvente

2. Considere la familia de funciones

$$\phi_n(t) = \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)}$$

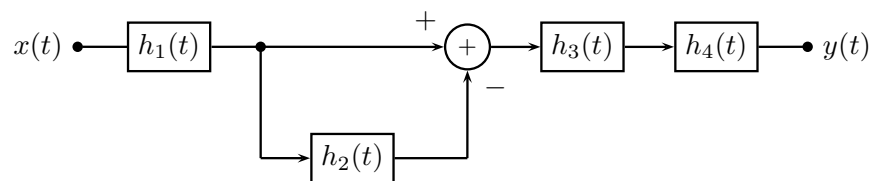
con $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$.

- (a) Demuestre que el conjunto de funciones $\{\phi_n(t), n \in \mathbb{Z}\}$ es ortonormal
- (b) Se tiene una señal $x(t)$, con $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, y tal que $X(\omega) = 0$ para $|\omega| > \pi$.
Encuentre una expresión cerrada (sin sumas ni integrales) de los coeficientes

$$c_n = \langle \phi_n(t), x(t) \rangle$$

en función de x .

3. Considere la interconexión de cuatro sistemas LTI como se muestran en la figura



donde

$$h_1(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\sin(\omega_c t)}{2\pi t} \right]$$

$$H_2(\omega) = e^{-j2\pi\omega/\omega_c}$$

$$h_3(t) = \frac{\sin(2\omega_c t)}{\pi t}$$

$$h_4(t) = u(t)$$

(a) Calcule y grafique $H_1(\omega)$

(b) ¿Cuál es la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema completo?

(c) Determine la salida $y(t)$ cuando la entrada es

$$x(t) = \sin(2\omega_c t) + \cos(\omega_c t/2)$$

Transformada CTFT (Continuous Time Fourier Transform):

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de frecuencia
Notación	$x(t)$	$X(\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(\omega)$
Lineal	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$
Desplazamiento Temporal	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
Desplazamiento en Frecuencia	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Inversión Temporal	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Multiplicación	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$
Derivada Temporal	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Derivada en Frecuencia	$tx(t)$	$j \frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Integral	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Escalamiento	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X(\frac{\omega}{a})$
Dualidad	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Simetría	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(\omega) = X^*(-\omega)$
	$x(t)$ real y par	$X(\omega)$ real y par
	$x(t)$ real e impar	$X(\omega)$ imaginario puro e impar
Teorema de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(t)x_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1^*(\omega)X_2(\omega)d\omega$	
Principio de Incertidumbre	Si $\int_{-\infty}^{\infty} t x(t) ^2 dt = 0$ entonces	
	$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 x(t) ^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 X(\omega) ^2 d\omega \geq \frac{\pi}{2} \ x\ ^4$	
	y la igualdad se da si y solo si $x(t) = a \exp(- b t^2)$, $a \in \mathbb{R}$	