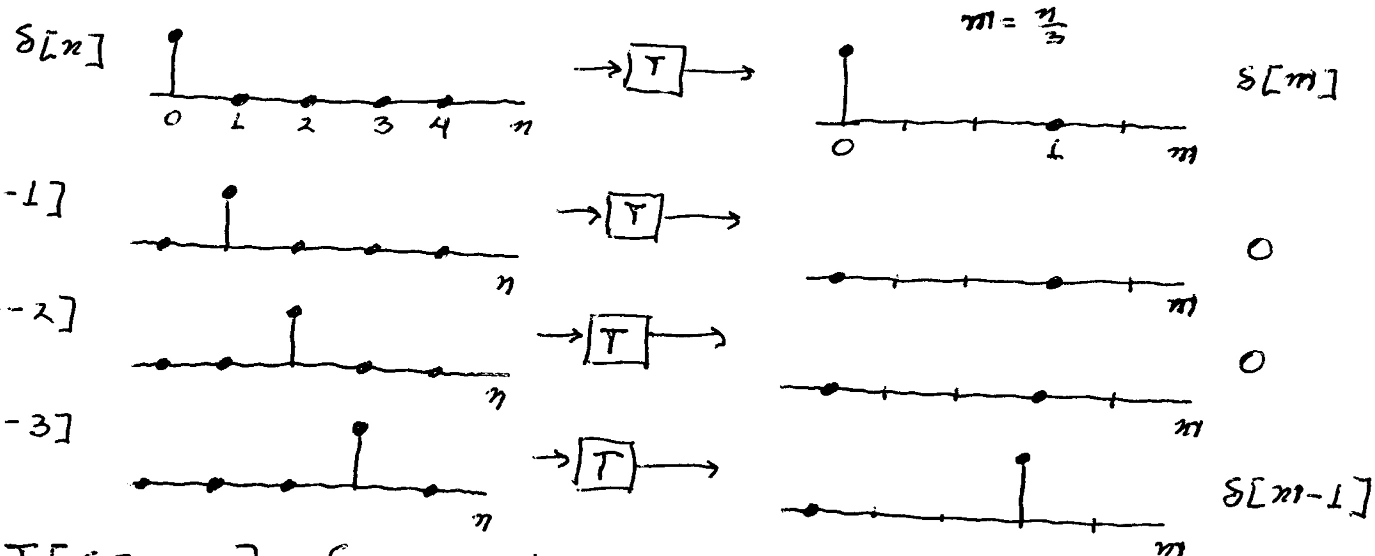
PAUTA CONTROL 1 EL41C/Primavera/2009

P1)

a) Las funciones armónicas corresponden a los "vectores propios" (auto-funciones, auto-secuencias o auto-vectores dependiendo del contexto) de sistemas LTI, y resulta natural descomponer señales usando los modos normales del sistema.

b)



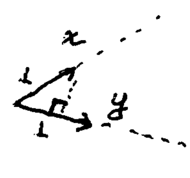
$$\Rightarrow T[\delta[n-k]] = \begin{cases} \delta[m - \frac{k}{3}] & \text{si } k \text{ es múltiplo de } 3 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

c) $h[n,k] = T[\delta[n-k]] \neq h[n-k] \Rightarrow$ no es posible

d) Las transformadas representan los valores propios de un sistema LTI asociado a las auto-funciones según:

DOMINIO	AUTOFUNCION	TRANSFORMADA
$t \in \mathbb{R}$	e^{st}	Laplace
$t \in \mathbb{R}$	$e^{j\omega t}$	CTFT
$n \in \mathbb{Z}$	z^n	Z
$n \in \mathbb{Z}$	$e^{j\omega n}$	DTFT
$n \in [0, N-1]$	$e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$	DFT

e) Si $x, y \in E$ (espacio de Hilbert) y $\|x\| = \|y\| = 1$, la desigualdad de C-S dice que la proyección de un vector unitario sobre otro (igual al coseno del ángulo entre ambos) es menor que 1: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| = 1$



f) Si $\{e_k \in E$ (espacio de Hilbert), $k \in \mathbb{Z}\}$ es un conjunto ortogonal, entonces la desigualdad de Bessel dice que

$$\sum_{k \in I} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \qquad \text{con } I \subseteq \mathbb{Z}$$

y si $\{e_k\}$ forma una base de E, e $I = \mathbb{Z}$, entonces por la identidad de Parseval se alcanza la igualdad.

P2)

a) Consideramos $x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X[k] e^{2\pi j k t}$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} y(t) = T[x(t)] &= T\Big[\sum_{k \in \mathbb{Z}} X[k] e^{2\pi j k t}\Big] \quad \Big\} \text{ lineal} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} X[k]\, T\big[1 \cdot e^{2\pi j k t}\big] \quad \Big\} \text{ F.I y } 1 \rightarrow \boxed{T} \rightarrow g(t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} X[k]\, g(t) e^{2\pi j k t} \\ &= g(t)\, x(t) \end{aligned}$$

b) Cualquier señal $x(t)$ es autofunción de un sistema LFI y $g(t)$ es el valor propio asociado a ellas.

Para que un sistema LFI sea T.I $g(t) = $ constante.

c) $X[k] \rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \rightarrow Y[k]$

$\Rightarrow X[k-k_0] \rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \rightarrow Y[k-k_0]$ } Sistema F.I

$\tilde{F}\{1\} \nearrow \delta[k] \rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \rightarrow G[k]$ $\Rightarrow$ respuesta a la constante

d)
$$\begin{aligned} Y[k] = T[X[k]] &= T\Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]\, \delta[k-n]\Big] \quad \Big\} \text{ lineal} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]\, T\big[\delta[k-n]\big] \quad \Big\} \text{ F.I y } \delta[k] \rightarrow \boxed{T} \rightarrow G[k] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]\, G[k-n] \\ &= X[k] \circledast G[k] \end{aligned}$$

e) Si $F[k]$ son los coeficientes de la serie de Fourier de una función $f(t)$, entonces:

$$|F[k]| = \left|\int_0^1 f(t)\, e^{-2\pi f k t}\, dt\right| \leq \int_0^1 |f(t)|\, dt \quad \text{luego } f \in L^1[0,1) \Rightarrow |F[k]| < \infty$$

Luego, ~~estable en el sentido BIFBOF es equivalente a pedir que~~ una condición necesaria para tener estabilidad BIFBOF es

$$x \in L^1[0,1) \Rightarrow y \in L^1[0,1)$$

f) En frecuencia la estabilidad BIFBOF es idéntica a la estabilidad BIBO de un sistema de tiempo discreto, luego:

$$\text{LFI BIFBOF} \Leftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}} |G[k]| < \infty \quad (G \in l_1(\mathbb{Z}))$$

P3

a) $$F[k] = \int_0^1 f(x)\, e^{-2\pi f k x}\, dx = \int_0^1 x \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-2\pi f k x}}{-2\pi f k}\right) dx \leftarrow \text{Para } k \neq 0$$

$$= \left[x \frac{e^{-2\pi f k x}}{-2\pi f k}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-2\pi f k x}}{-2\pi f k}\, dx$$

$$= \frac{1}{-2\pi f k} - \cancel{\left[\frac{e^{-2\pi f k x}}{(-2\pi f k)^2}\right]_0^1} \rightarrow 0$$

Para $k=0$, $F[0] = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow F[k] = \begin{cases} 1/2 & \text{para } k=0 \\ \frac{1}{-2\pi f k} & \text{para } k \neq 0 \end{cases}$$

$$\|f\|^2 = \int_0^1 |x|^2\, dx = \frac{1}{3}$$

$$\|F\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |F[k]|^2 = \frac{1}{4} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi k)^2}$$

Parseval: $\|f\|^2 = \|F\|^2 \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

b) Para que aparezca un coeficiente de Fourier del estilo $\frac{1}{k^2}$ (de manera que en $\|F\|$ aparezca un $\frac{1}{k^4}$) partimos probando con la serie de Fourier de x^2 pues al integrar dos veces por partes debiera aparecer un $\frac{1}{k^2}$.

$$\int_0^L x^2 e^{-2\pi j k x} dx = \int_0^L x^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-2\pi j k x}}{-2\pi j k}\right) dx \quad \leftarrow \text{Para } k \neq 0$$

$$= \left[x^2 \frac{e^{-2\pi j k x}}{-2\pi j k}\right]_0^L - \int_0^L \cancel{2}x \, \frac{e^{-2\pi j k x}}{-\cancel{2}\pi j k} dx$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ F[k]}}{\frac{1}{-2\pi j k}} + \frac{1}{\pi j k} \underbrace{\int_0^L x e^{-2\pi j k x} dx}_{F[k] = \frac{1}{-2\pi j k} \text{ (de la parte anterior)}}$$

Para evitar el primer término y dejar un solo término proporcional a $1/k^2$ tomamos $g(x) = x^2 - x$

$\Rightarrow$

$$G[k] = \begin{cases} \int_0^L (x^2 - x)\, dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} & \text{para } k = 0 \\ \left(\cancel{F[k]} + \frac{L}{2\pi^2 k^2}\right) - \cancel{F[k]} = \frac{1}{2\pi^2 k^2} & \text{para } k \neq 0 \end{cases}$$

$$\|g\|^2 = \int_0^L (x^2 - x)^2 dx = \frac{1}{5} - 2\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{30}$$

$$\|G\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |G[k]|^2 = \frac{1}{36} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi^2 k^2)^2}$$

Parseval: $\|g\|^2 = \|G\|^2 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{30} - \frac{1}{36}}_{1/180} = \frac{1}{2\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$