Control 1

EL41C – Análisis de Señales

Fecha: 4 de Septiembre de 2009

1. Responda las siguientes preguntas fundamentando siempre su respuesta:

   (a) ¿Por qué las funciones armónicas son tan importantes en el contexto de sistemas LTI?

   (b) Para un sistema de decimación, con entrada $x[n]$ y salida $y[m] = x[3m]$, con $n, m \in \mathbb{Z}$ ¿cuál es la señal respuesta al impulso $\delta[n-k]$, con $n, k \in \mathbb{Z}$?

   (c) Para un sistema de decimación, con entrada $x[n]$ y salida $y[m] = x[3m]$, con $n, m \in \mathbb{Z}$ ¿es posible escribir la salida como una convolución $y[m] = (h \circledast x)[m]$?

   (d) ¿En qué contexto aparecen y qué importancia tienen las transformadas: de Laplace, CTFT, Z, DTFT y DFT?

   (e) ¿Qué significado geométrico tiene la desigualdad de Cauchy–Schwarz?

   (f) ¿Qué relación existe entre la identidad de Parseval y la desigualdad de Bessel?

2. Considere un sistema continuo en $t \in [0, 1)$. Se define una nueva propiedad de estos sistemas que llamaremos **invariante en la frecuencia** (o *frequency invariant*, abreviado FI).

   Un sistema es *invariante en la frecuencia* si

$$x(t) \bullet\!\!\longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow\!\!\bullet\ y(t)$$

$\Longrightarrow$

$$x(t)\ e^{-2\pi j k_0 t} \bullet\!\!\longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow\!\!\bullet\ y(t)\ e^{-2\pi j k_0 t}$$

   (a) Considere un sistema **lineal** e **invariante en la frecuencia**, abreviado LFI. Se define la *señal respuesta a la constante*, $g(t)$, como la salida del sistema a la entrada $x(t) = 1$, $t \in [0, 1)$. Encuentre una expresión cerrada (sin sumas ni integrales) de la salida, $y(t)$, de un sistema LFI a una entrada arbitraria, $x(t)$, asumiendo conocida la señal respuesta a la constante.

   Pista: considere la expansión de la señal de entrada en serie de Fourier.

   (b) Encuentre las auto–funciones de un sistema LFI y los auto–valores asociados. ¿Qué condición debe cumplir la señal respuesta a la constante, $g(t)$, para que un sistema LFI sea invariante en el tiempo?

   (c) Escriba las definiciones de un sistema FI y de la señal respuesta a la constante, en términos de los coeficientes de la serie de Fourier de la entrada, $X[k]$, y de la salida, $Y[k]$.

   (d) Ahora asuma conocidos los coeficientes de la serie de Fourier de la señal respuesta a la constante, $G[k]$. Encuentre una expresión que relacione los coeficientes de la serie de Fourier de la salida, $Y[k]$, con los coeficientes de la serie de Fourier de una entrada arbitraria, $X[k]$.

   Pista: considere el desarrollo de $X[k]$ en tren de pulsos.

   (e) Un sistema se denomina **estable en el sentido BIFBOF** (*bounded input in frequency bounded output in frequency*) si

$$|X[k]| < \infty \ \ \forall k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad |Y[k]| < \infty \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

   Escriba esta definición en el dominio del tiempo, es decir, sin hacer referencia a los coeficientes de la serie de Fourier ni de la entrada ni de la salida.

   (f) ¿Que condición deben cumplir los coeficientes $G[k]$ para que un sistema LFI sea estable en el sentido BIFBOF?

3. En este problema se pide demostrar el resultado de dos sumas infinitas usando series de Fourier y la identidad de Parseval.

   (a) Demuestre que

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \, .$$

   Para ello siga los siguientes pasos:

   - Calcule los coeficientes de la serie de Fourier para la función $f \in L^2[0,1)$ definida como $f(x) = x$, con $x \in [0,1)$.
   - Calcule la energía (norma al cuadrado) de $f(x)$ y de sus coeficientes de Fourier, $F[k]$.
   - Utilice la identidad de Parseval para obtener el resultado de la serie.

   (b) Demuestre que

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \, .$$

   Para esto debe encontrar una función $g \in L^2[0,1)$, distinta a f, que le permita seguir el mismo procedimiento anterior para llegar al resultado.