Pregunta 5

Si tenemos que $V(x) = -\alpha\delta(x)$

- Los estados estacionarios, tenemos la ecuación de Shrödinger

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha\delta\left(x\right)\psi = E\psi$$

para $x < 0$, $V(x) = 0$, por lo tanto

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar}\psi = k^2\psi$$

con $k = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar}}$ recuerden que $E < 0$, por lo tanto k es real. Las soluciones para esta ecuación son de la forma:

$$\psi \quad = \quad A\exp\left(-kx\right) + B\exp\left(kx\right)$$

Pero el primer término $\rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$, por lo tanto hacemos que $A = 0$. De la misma manera para $x > 0$, $\psi = C\exp\left(-kx\right)$. Como ψ es continua es necesario que $C = B$, finalmente:

$$\psi \begin{cases} B\exp\left(kx\right) & x \leq 0 \\ B\exp\left(-kx\right) & x \geq 0 \end{cases}$$

Para calcular B podríamos ocupar la continuidad de $\frac{d\psi}{dx}$, sin embargo en este caso no es continua porque estamos en presencia de una delta de dirac. Luego tenemos que integrar la ecuación de Schrödinger entre ϵ y $-\epsilon$.

$$-\frac{\hbar}{2m}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{d^2\psi\left(x\right)}{dx^2}dx - \alpha\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta\left(x\right)\psi\left(x\right)dx = E\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\psi\left(x\right)dx$$

Sabemos que $\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\psi\left(x\right)dx \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$, y que $\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta\left(x\right)f\left(x\right)dx = f(0)$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dx}\mid_{\epsilon} - \frac{d\psi}{dx}\mid_{-\epsilon} &= -\frac{2m\alpha}{\hbar}\psi\left(0\right) \\ \Delta\left(\frac{d\psi}{dx}\right) &= -\frac{2m\alpha}{\hbar}\psi\left(0\right) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dx} = -Bk\exp\left(-kx\right) & x>0 \\ \frac{d\psi}{dx} = -Bk\exp\left(-kx\right) & x<0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dx}\mid_{\epsilon} - \frac{d\psi}{dx}\mid_{-\epsilon} &= -Bk + -Bk \\ \Delta\left(\frac{d\psi}{dx}\right) &= -2Bk \\ k &= \frac{m\alpha}{\hbar^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto las energías permitidas son:

$$E = -\frac{h^2k^2}{2m} = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

Finalmente, normalizando ψ, tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi\left(x\right)\right| dx = 2\left|B\right|^2 \int_0^{\infty} \exp\left(-2kx\right) = \frac{\left|B\right|^2}{k} = 1$$

escogiendo la raíz positiva (porque nos sale más fácil):

$$B = \sqrt{k} = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \psi\left(x\right) &= \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar}\exp\left(-\frac{m\alpha\left|x\right|}{\hbar^2}\right) \\ E &= -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2} \end{aligned}$$

- Para los estados no estacionarios (scattering) tenemos que $E>0$, la solución de la ecuación de Schrödinger:

  $$\frac{d\psi^2}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi = -k^2\psi$$

  donde

  $$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Las soluciones de esta ecuación son de la forma:

$$\begin{cases} A\exp\left(ikx\right)+B\exp\left(-ikx\right) & x<0 \\ C\exp\left(ikx\right)+D\exp\left(-ikx\right) & x>0 \end{cases}$$

Por la continuidad de ψ, se tiene que:

$$A+B=C+D$$

Las derivadas son

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dx}=ik\left(A\exp\left(ikx\right)-B\exp\left(-ikx\right)\right) & x<0 \\ \frac{d\psi}{dx}=ik\left(C\exp\left(ikx\right)-D\exp\left(-ikx\right)\right) & x>0 \end{cases}$$

De la misma manera que antes, y ahora $\psi\left(0\right)=A+B$

$$\Delta\left(\frac{d\psi}{dx}\right)=ik\left(C-D-A+B\right)$$

Entonces

$$ik\left(C-D-A+B\right)=-\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\left(A+B\right)$$

lo que es equivalente

$$C-D=A\left(1+2i\beta\right)-B\left(1-2i\beta\right)$$

con

$$\beta\equiv\frac{m\alpha}{\hbar^2 k}$$

Para scattering tenemos que cada uno de los parámetros A, B, C, D representan la amplitud de una onda que viaja, unas A y C viajan en el sentido del aumento de x y B y D viajan en el sentido opuesto, como queremos observar scattering si hacemos pasar una onda de izquierda a derecha es lo mismo que si queremos pasarla de derecha a izquierda debido a la simetría del potencial ($V(x)=\alpha\delta(x)$) por lo tanto sólo observaremos el caso en que tenemos una onda que viene de la izquierda y en el delta de potencial rebota y transmite, por lo tanto la onda representada por la amplitud D no existe. De esta manera tenemos $D=0$. Despejando C y B tenemos:

$$\begin{aligned} B &= \frac{i\beta}{1-i\beta}A \\ C &= \frac{1}{1-i\beta}A \end{aligned}$$

Obviamente el coeficiente de transmisión T y de reflexión R son:

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{\beta^2}{1+\beta^2} \\
T &= \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{1}{1+\beta^2}
\end{aligned}
$$

Reemplazando β en las ecuaciones anteriores:

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{1}{1+\left(\frac{2\hbar^2 E}{m\alpha^2}\right)} \\
T &= = \frac{1}{1+\left(\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2 E}\right)}
\end{aligned}
$$

Ahora, si estudiamos estos términos podemos observar que si tenemos una mayor energía el término R disminuye, o sea, menos parte de la onda refleja en la »pared«, y el término T aumenta lo que implica que más parte de la onda la cruza. Al tomar el caso en que E disminuye, se observa que el término R aumenta y el T disminuye, lo que implica que la onda más se reflejó que cruzó la pared.