EL3004-Circuitos Electrónicos Analógicos

Clase No. 2: Mecánica Cuántica

Marcos Diaz

Departamento de Ingeniería Eléctrica (DIE)
Universidad de Chile

30 de julio de 2009

Repaso Clase #1

- Experimentos que mostraron las limitaciones de la mecánica clásica
  - Radiación de cuerpo negro
  - Efecto Fotoelectrico
  - Spectro del átomo de Hidrogeno
- Cuantización de la energía (Fotón) ($E = n\hbar\omega \quad n = 1, 2, 3 \ldots$)
- Dualidad onda particula
  - Una onda-particula puede ser representada por una superposición infinita de ondas.
  - El comportamiento de onda le da una velocidad de fase (puede ser mayor que c).
  - Como es una superposición de ondas también le da velocidad de grupo (velocidad de la información)

$$E = \hbar\omega = K + U \tag{41}$$

$$\psi = A_0 e^{-j(Et - px)/\hbar} \tag{42}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \tag{43}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-j(\omega t - \beta x)} \tag{44}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{j}{\hbar} E\psi = -\frac{j}{\hbar}\left(U + \frac{1}{2}mv^2\right)\psi \tag{45}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi = -\frac{m^2 v^2}{\hbar^2}\psi \tag{46}$$

$$-\frac{1}{2}mv^2\psi = -j\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} + U\psi \tag{47}$$

$$-\frac{1}{2}mv^2\psi = \frac{1}{2m}\hbar^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{48}$$

Ecuación de Schordinger en 1D

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{2m}{\hbar^2}U\psi + j\frac{2m}{\hbar}\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \tag{49}$$

Ecuación Schordinger en 3D

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{2m}{\hbar^2}U\psi + j\frac{2m}{\hbar}\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \tag{50}$$

$$\psi = \Psi(x)\Gamma(t) \tag{51}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{dx^2} - U = -j\frac{\hbar}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt} \tag{52}$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = j\frac{C}{\hbar}\Gamma \tag{53}$$ $$\Gamma(t) = e^{jCt/\hbar}$$

Comparando con Ec. 42

$$\Gamma(t) = e^{-jEt/\hbar}$$

$$\psi = \Psi(x)e^{-jEt/\hbar} \text{ Poniendo en Ec. 52} \tag{54}$$

Ecuación de Schrodinger (ES) unidimensional e independiente del tiempo

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0 \tag{55}$$

Interpretación de Max Born.

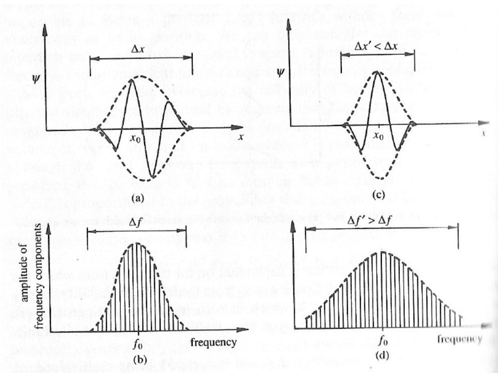
- $|\Psi|^2$ es proporcional a la probabilidad de una particula de estar dentro de una unidad de volumen, centrada en el punto donde Ψ es evaluada, en el tiempo t.
- Probabilidad de encontrar una particula en el rango $x \to x + dx$, $y \to y + dy$ y $z \to z + dz$ es proporcional a:

$$|\Psi(x,y,z)|^2 dxdydz = \Psi\Psi^* dxdydz. \tag{56}$$

- Es conveniente tomar la constante de proporcionalidad tal que la integración sobre todo el espacio sea igual a 1.

$$\int\int\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,y,z)|^2 dxdydz = 1 \tag{57}$$

- Ψ debe ser una función continua y uni-evaluada.



$$\Delta x = v\Delta t \tag{58}$$ $$\Delta E \Delta t \geq h \tag{59}$$

$$\Delta E = h\Delta f = mv\Delta v = v\Delta p$$

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \tag{60}$$

Ecuación exacta.

En un pozo potencial $U = 0$ para $0 \leq x \leq$ y $U = \infty$ para $x > d$ y $x < 0$.

$$\frac{d\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\Psi = 0 \tag{61}$$

$$\Psi = Ae^{j\beta x} + Be^{-j\beta x} \quad \text{con} \quad \beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E} \tag{62}$$

Como $\Psi = 0$ en $x = 0$ y en $x = d$,

$$B = -A \qquad 0 = A(e^{j\beta d} - e^{-j\beta d}) \qquad sin(\beta d) = 0$$

$$\beta d = \left[\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\right] d = n\pi \quad \text{donde} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{63}$$

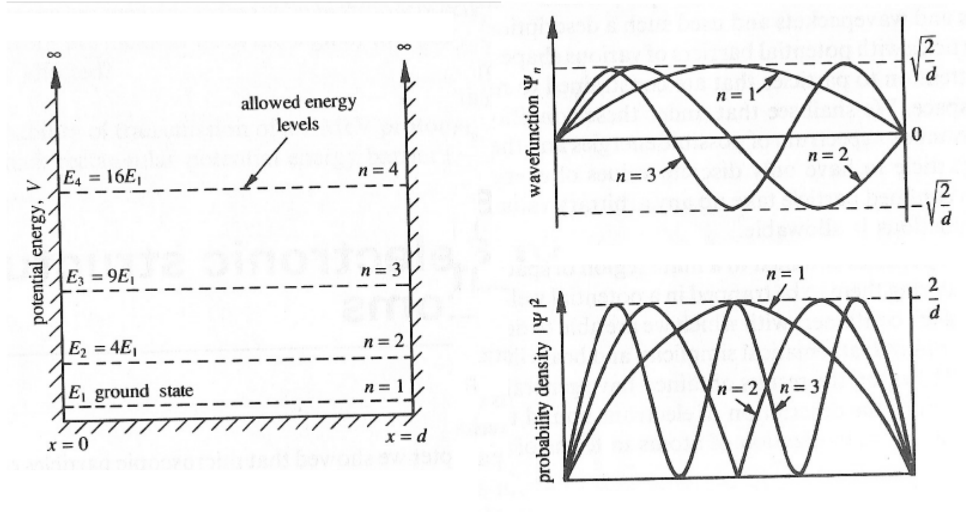
$$\Psi = C\,sin\Big(\frac{n\pi x}{d}\Big) \qquad (64)$$

$$\int_0^d \Psi\Psi^* dx = 1$$

$$\int_0^d C^2 sin^2\Big(\frac{n\pi x}{d}\Big) dx = 1$$

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{d}}\,sin\Big(\frac{n\pi x}{d}\Big) \qquad n = 1, 2, 3 \ldots \qquad (65)$$

$$E = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2md^2} = \frac{n^2 h^2}{8\pi d^2} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots \qquad (66)$$



Resumen Clase #2

- La ecuación de Schrodinger
- Interpretación de la función de onda
- El Principio de Incertidumbre
- Estructura electronica de los átomos
  - Particula en un pozo potencial unidimensional