EL3002-Electromagnetismo Aplicado

Clase No. 2: Fuerzas, materiales y estática

Marcos Diaz

Departamento de Ingeniería Eléctrica (DIE)
Universidad de Chile

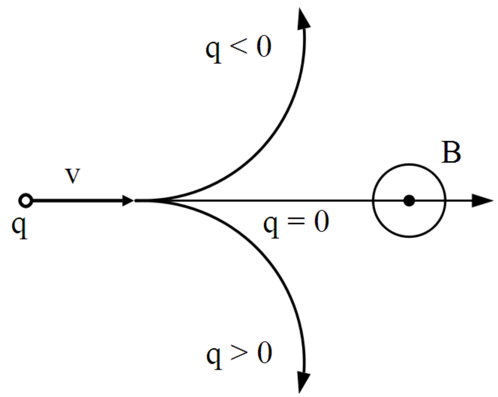
30 de julio de 2009

Repaso Clase #1

- Ecuaciones de Maxwell
- Electrostatica
  - Ley de Coulomb
  - Ley de Biot-Savart

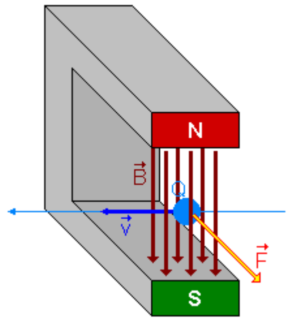
Fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5)$$



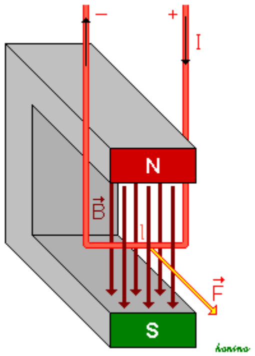
Fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6)$$



Fuerza de Laplace

$$\mathbf{F} = \int_L I \cdot d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (7)$$



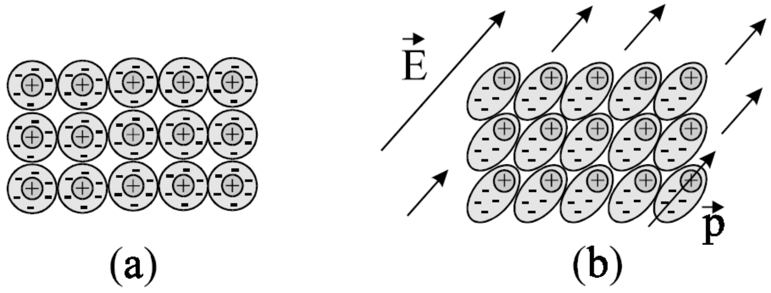
Fuerza de Lorentz: Forma integral

Si los campos eléctrico, **E**, y magnético, **B** no son modificados por la presencia de carga eléctrica, $\rho(\mathbf{x})$ y la densidad de corriente, $\mathbf{J}(\mathbf{x})$, las dos últimas no son modificadas por los campos, la fuerza de Lorentz se puede expresar como:

$$\mathbf{F} = \int_V (\rho(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}))dV \quad (8)$$

Aplicaciones

Problemas.



$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V} \tag{9}$$

$\mathbf{p}_i$ momento dipolo eléctrico y Δv es el elemento infenitesimal de volumen.

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{10}$$

D es el vector desplazamiento eléctrico.

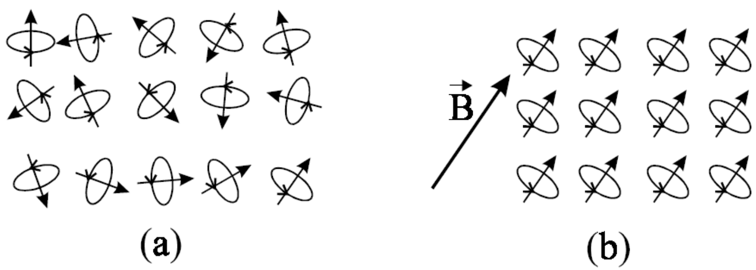
En muchos materiales, la polarización **P** tiene la misma dirección que **E**, aunque rara vez estarán en fase en el tiempo. No obstante para medios lineales e isotrópicos:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi^* \mathbf{E} \tag{11}$$

χ^* en general una constante compleja llamada susceptibilidad eléctrica.

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi^*) \mathbf{E} = K^* \epsilon_0 \mathbf{E} \tag{12}$$

$K^* = K' - jK''$ es la constante dieléctrica del medio y $\epsilon' - j\epsilon''$ es la permitividad compleja. La parte imaginaria negativa incorpora los efectos disipativos (prdida de energa) debido a la polarizacin del material.



$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \tag{13}$$

En la mayoría de los materiales (salvo los ferromagnéticos y los ferrimagnéticos), **M** esta relacionado linealmente con **B** y por lo tanto con **H**, expresándose por:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \tag{14}$$

χ_m es la susceptibilidad magnética.

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \tag{15}$$

$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$ es la permeabilidad magnética.

Forma diferencial

Ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\\ \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r},t) &= \rho(\mathbf{r},t)\\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{J}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= 0, \end{aligned} \tag{16}$$

Estática

Ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0\\ \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \rho(\mathbf{r})\\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \mathbf{J}(\mathbf{r})\\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0, \end{aligned} \tag{17}$$

Un vector queda totalmente especificado por su divergencia y su rotacional. La primera se conoce como la fuente generadora del campo y el segundo como el remolino (vortex).

Clase I: Son aquellos que a la vez son solenoidales e irrotacionales. Por lo tanto, si **F** es un campo vector genérico:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} &= 0 \quad \text{selenoidal}\\ \nabla \times \mathbf{F} &= 0 \quad \text{irrotacional}\end{aligned} \tag{18}$$

$\Rightarrow$ existe una función escalar ϕ tal que $\mathbf{F} = -\nabla\phi \Rightarrow$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (-\nabla\phi) = -\nabla^2\phi = 0 \quad \text{Ecuación de Laplace} \tag{19}$$

Clase II

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} &\neq 0 \text{ o } \nabla \cdot \mathbf{F} = \rho(\mathbf{x})\\ \nabla \times \mathbf{F} &= 0\end{aligned} \tag{20}$$

$\Rightarrow$ existe una función escalar ϕ tal que $\mathbf{F} = -\nabla\phi \Rightarrow$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (-\nabla\phi) = -\nabla^2\phi = \rho(\mathbf{x}) \quad \text{Ecuación de Poisson} \tag{21}$$

con condiciones de borde del tipo Dirichlet ($\phi = \phi_c$) o del tipo Neumann $\left(\frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{x}} = k(\mathbf{x})\right)$ o mixtas.

Clase III

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{F} &\neq 0 \text{ o } \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{22}$$

Recordando que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow$

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{23}$$

A vector potencial

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \tag{24}$$

existe un vortex tal que

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \tag{25}$$

Clase III

Recordando que

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{26}$$

es posible elegir **A** tal que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \Rightarrow$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J}(\mathbf{x}) \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -J_x(\mathbf{x}) \\ \nabla^2 A_y &= -J_y(\mathbf{x}) \\ \nabla^2 A_z &= -J_z(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{28}$$

Clase IV

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &\neq 0 \text{ o } \nabla \cdot \mathbf{F} = \rho(\mathbf{x}) \\ \nabla \times \mathbf{F} &\neq 0 \text{ o } \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{29}$$

Existe una forma conocida como el teorema de Helmholtz, que seala que un campo vector general, con $\nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0$ y $\nabla \times \mathbf{F} \neq 0$, siempre puede ser descompuesto como la suma de un campo solenoidal y un campo irrotacional.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= -\nabla \cdot \mathbf{F} = \rho(\mathbf{x}) \\ \nabla^2 \mathbf{A} &= -\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{31}$$

Aplicaciones

Problema.

Resumen clase #2

- Fuerzas Electromagnética
- Medios Materiales
  - Polarización Eléctrica
  - Polarización Magnética
- Clasificación de los distintos campos vector