EL3002-Electromagnetismo Aplicado

Clase No. 8: Materiales eléctricos y Magnéticos

Marcos Diaz

Departamento de Ingeniería Eléctrica (DIE)
Universidad de Chile

20 de agosto de 2009

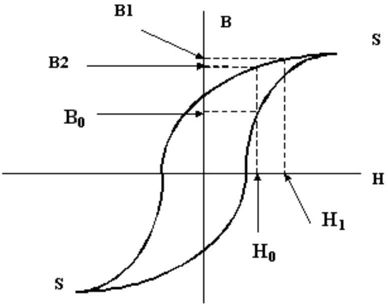
Repaso Clase #7

- Polarización de los diélectricos
- Campo Magnético en los materiales

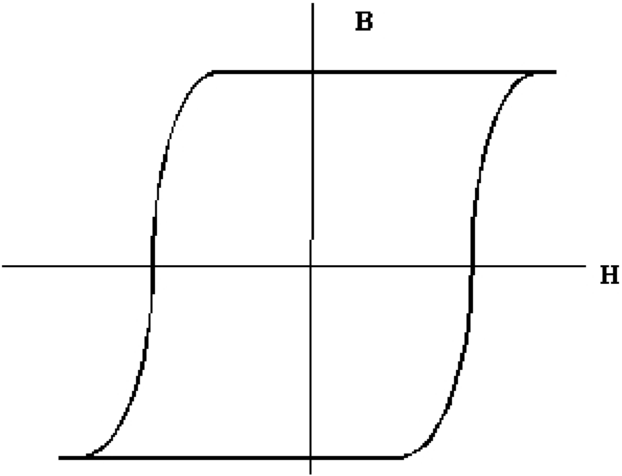
Histeresis

Cuando un material ferromagntico, sobre el cual ha estado actuando un campo magntico, cesa la aplicacin de ste, el material no anula completamente su magnetismo, sino que permanece un cierto magnetismo residual.

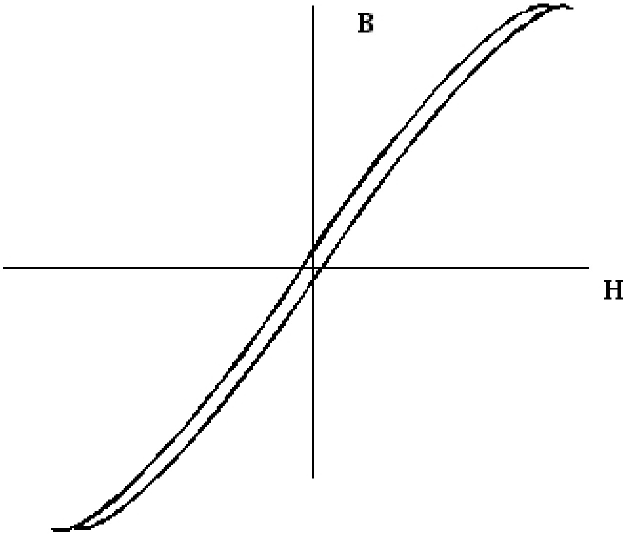
Para desimantarlo ser precisa la aplicacin de un campo contrario al inicial. Este fenmeno se llama **HISTERESIS** magntica, que quiere decir, inercia o retardo. Los materiales tiene una cierta inercia a cambiar su campo magntico.



Materiales Magnéticos Duros



Materiales Magnéticos Blandos



Simulación de Histeresis

Simulación de Histeresis

Diferencias Finitas

En una dimensión (1D) en el eje x el metodo de diferencias finitas introduce un conjunto de puntos de una malla $x_1, x_2, \ldots, x_N$ donde la función $f(x)$ toma los valores $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_N)$.

Sea $x_{n+1} = x_n + ih$ donde i es un entero y h es la distancia entre puntos de la malla (tamño de la celda). Usando una expansiónh de Taylor

$$f(x+\delta) = f(x) + \delta \frac{df(x)}{dx} + \frac{\delta^2}{2}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{\delta^3}{6}\frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \ldots \qquad (132)$$

Se tiene entonces al cambiar δ por h y reordenando los terminos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df(x)}{dx} + O(h) \qquad (133)$$

Diferencias Finitas-Cont.

El error de esta aproximación es de primer orden. Una forma de aumentar el orden de la aproximación es tomar la diferencia entre dos celdas

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x-h) &= \left[f(x) + h\frac{df(x)}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2f(x)}{dx^2} + \frac{h^3}{6}\frac{d^3f(x)}{dx^3} + \dots \right] \\ &- \left[f(x) + (-h)\frac{df(x)}{dx} + \frac{(-h)^2}{2}\frac{d^2f(x)}{dx^2} + \frac{(-h)^3}{6}\frac{d^3f(x)}{dx^3} + \dots \right] \\ &= 2h\left[\frac{df(x)}{dx} + \underbrace{\frac{h^2}{6}\frac{d^3f(x)}{dx^3} + \dots}_{O(h^2)} \right] \end{aligned} \tag{134}$$

Esto implica

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{df(x)}{dx} + O(h^2) \tag{135}$$

Esta aproximación se hace inexacta para longitudes de onda cortas, en particular cuando la longitud de onda es menor que el largo de cuatro celdas.

Diferencias Finitas-Cont.

Una alternativa es usar "staggered grids" y computar la derivada de primer orden en la mitad de la celda $x_{i+1/2} = x_i + h/2$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{df\left(x+\frac{h}{2}\right)}{dx} + O(h^2) \tag{136}$$

Una formula para la segunda derivada puede ser obtenida apartir de la ecuación anterior

$$\begin{aligned} f(x+h)-2f(x)+f(x-h) &= \left[f(x)+h\frac{df(x)}{dx}+\frac{h^2}{2}\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\frac{h^3}{6}\frac{d^3f(x)}{dx^3}+\ldots\right] \\ &- 2f(x)+\left[f(x)+(-h)\frac{df(x)}{dx}+\frac{(-h)^2}{2}\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\ldots\right] \\ &= h^2\left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\underbrace{\frac{h^2}{12}\frac{d^4f(x)}{dx^4}+\ldots}_{O(h^2)}\right] \end{aligned} \tag{137}$$

Se debe notar que los errores $O(h^2)$, en las ecuaciones anteriores solo son

Resolviendo Poisson

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(x), \tag{138}$$

and formulate the corresponding finite difference equations. For this we use the transformation

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} \equiv \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + 1\phi_{i-1}}{\Delta x^2}. \tag{139}$$

$$E(x) = -\frac{d\phi(x)}{dx}, \tag{140}$$

thus

$$E_j = \frac{\phi_{i-1} - \phi_{i+1}}{2\Delta x}. \tag{141}$$

Resolviendo Poisson-Cont.

$$
\begin{array}{rcl}
-2\,\phi_0 + \phi_1 + \phi_{N_x-1} & = & p_0 \\
\phi_0 - 2\,\phi_1 + \phi_2 & = & p_1 \\
\phi_1 - 2\,\phi_2 + \phi_3 & = & p_2 \\
\vdots & = & \vdots \\
\phi_{N_x-3} - 2\,\phi_{N_x-2} + \phi_{N_x-1} & = & p_{N_x-2} \\
\phi_0 + \phi_{N_x-2} - 2\,\phi_{N_x-1} & = & p_{N_x-1},
\end{array}
\tag{142}
$$

Resolviendo Poisson-Cont.

$$
\begin{array}{rcl}
\phi_0 - 2\,\phi_1 + \phi_2 & = & p_1 \\
\phi_1 - 2\,\phi_2 + \phi_3 & = & p_2 \\
\vdots & = & \vdots \\
\phi_{N_x-3} - 2\,\phi_{N_x-2} + \phi_{N_x-1} & = & p_{N_x-2} \\
\phi_0 + \qquad \phi_{N_x-2} - 2\,\phi_{N_x-1} & = & p_{N_x-1}
\end{array}
\tag{143}
$$

.

Resolviendo Poisson-Cont.

$$
\begin{array}{rcl}
-2\,\phi_1 + \phi_2 & = & p_1 \\
\phi_1 - 2\,\phi_2 + \phi_3 & = & p_2 \\
\phi_2 - 2\,\phi_3 + \phi_4 & = & p_3 \\
\vdots & = & \vdots \\
\phi_{N_x-3} - 2\,\phi_{N_x-2} + \phi_{N_x-1} & = & p_{N_x-2} \\
\phi_{N_x-2} - 2\,\phi_{N_x-1} & = & p_{N_x-1}
\end{array} \tag{144}
$$

Resolviendo Poisson-Cont.

$$
\begin{aligned}
-2\,\phi_1 + \phi_2 &= 1\,p_1 \\
2\,\phi_1 - 4\,\phi_2 + 2\,\phi_3 &= 2\,p_2 \\
3\,\phi_2 - 6\,\phi_3 + 3\,\phi_4 &= 3\,p_3 \\
\vdots &= \vdots \\
(N_x-1)\,\phi_{N_x-2} - 2\,(N_x-1)\,\phi_{N_x-1} &= (N_x-1)\,p_{N_x-1},
\end{aligned}
\tag{145}
$$

$$
\phi_{N_x-1} = \frac{1}{(-N_x)} \sum_{i=1}^{N_x-1} (i)\,p_i. \tag{146}
$$

Resolviendo Poisson-Cont.

$$
\begin{aligned}
\phi_0 &= 0, \\
\phi_{N_x-1} &= \frac{1}{(-N_x)} \sum_{i=1}^{N_x-1} (i)\, p_i, \\
\phi_{N_x-2} &= p_{N_x-1} + 2\,\phi_{N_x-1}, \\
\phi_i &= p_{i+1} + 2\,\phi_{i+1} - \phi_{i+2}, \quad N_x - 3 \geq i \geq 1.
\end{aligned} \tag{147}
$$

Resolviendo Poisson-Cont.

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{\phi_{i-1} - \phi_{i+1}}{2\Delta x} \qquad 1 \leq i < N_x - 2, \\ E_0 &= -\frac{\phi_1 - \phi_{N_x-1}}{2\Delta x}, \\ E_{n_x-1} &= -\frac{\phi_0 - \phi_{N_x-2}}{2\Delta x}. \end{aligned} \tag{148}$$

Resumen Clase #8

- Histeresis
- Solución numerica de la Ec. de poisson