

EL3002-Electromagnetismo Aplicado

Clase No. 7: Materiales eléctricos y Magnéticos

Marcos Diaz

Departamento de Ingeniería Eléctrica (DIE)
Universidad de Chile

18 de agosto de 2009

- 1 Repaso Clase #6
- 2 Polarización de los dieléctricos en el campo electrostático
- 3 Campos Magnéticos en los materiales
- 4 Resumen Clase #7

Repaso Clase #6

- Metodo de Separación de variables
 - Coordenadas cilindricas, (r, θ, z)
 - Coordenadas esfericas, (r, θ, φ)

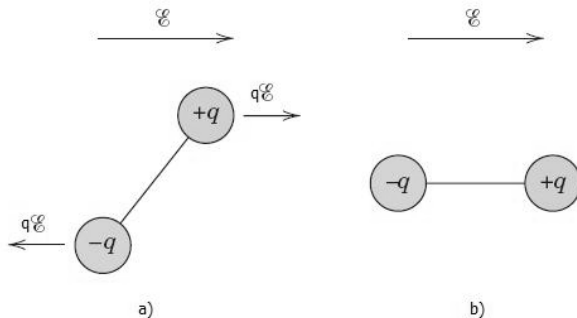


Figura: a) Fuerzas actuando en un dipolo debido a un campo eléctrico aplicado. b) El dipolo se encuentra finalmente alineado al campo aplicado.

Se desea caracterizar un dipolo mediante una cantidad vectorial. Sea $\mathbf{r}$ el vector de posición de la carga Q respecto a la carga $-Q$. El momento dipolar se define como:

$$\mathbf{p} = Q \cdot \mathbf{r}$$

Un diferencial de momento dipolar se define como la suma de todos los momentos dipolares en el volumen definido.

$$d\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i \quad (125)$$

El vector de polarización, $\mathbf{P}(\mathbf{r})$, en un punto del diferencial de volumen dV se define como la densidad de momento dipolar por unidad de volumen:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{dV} = \frac{d\mathbf{p}}{dV}$$

Este vector define de manera unívoca la manera en que un medio se encuentra polarizado.

Clases de dieléctricos

En el caso de medios *lineales, homogéneos e isostrópicos*, el vector de polarización es:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (126)$$

donde χ_e es un valor adimensional y positivo, llamado *susceptibilidad eléctrica*.

Para medios *no homogéneos*, la relación 126 se mantiene, sin embargo, la susceptibilidad depende de la posición:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi_e(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (127)$$

Clases de dieléctricos

En medios *anisotrópicos*, las fuerzas existentes en su estructura condicionan la magnitud de la polarización, actuando de manera distinta según cómo sea la dirección del campo eléctrico primario. Por lo tanto, existen direcciones que facilitan la polarización y otras que la dificultan. En estos medios, la susceptibilidad magnética es un *tensor*. Para medios *lineales anisótropos*, se tiene:

$$\chi_e = \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \quad (128)$$

Clases de dieléctricos

Para medios *no lineales*, la polarización varía fuertemente en función de la intensidad del campo aplicado, y no existe una relación sencilla entre el campo eléctrico y el vector polarización:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi_e(\mathbf{E}(\mathbf{r})) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (129)$$

En este tipo de medios, de creciente interés tecnológico, suele desarrollarse la función de susceptibilidad alrededor del punto $E = 0$ mediante una serie de Taylor:

$$P_i = \epsilon_0 \left(\sum_j \chi_{ij} E_j + \sum_j \sum_k \chi_{ijk} E_j E_k + \sum_j \sum_k \sum_l \chi_{ijkl} E_j E_k E_l + \dots \right) \quad (130)$$

donde los subíndices $i, j, k, l (= 1, 2, 3,)$ denotan las diferentes componentes.

Densidad de carga de Polarización

La carga de polarización en función de $\mathbf{P}$ es:

$$Q_{\text{polarizac. en } S} = - \int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

consideremos una pequeña superficie cerrada, ΔS , que encierra un volumen ΔV en la que se quiere calcular la densidad de carga. Se tiene:

$$Q_{\text{polarizac. en } \Delta S} = \Delta V \rho_p = - \int_{\Delta S} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

Tomando la segunda igualdad, despejando ρ_p y haciendo $\Delta V \rightarrow 0$, se obtiene la siguiente expresión:

$$\rho_p = - \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\int_{\Delta S} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \right)$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

Densidad de carga de Polarización

Para calcular la densidad de cargas superficiales de polarización,

$$\int_{\Delta S} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{P}_1 \cdot \Delta\mathbf{S}_1 + \mathbf{P}_2 \cdot \Delta\mathbf{S}_2$$

$$\sigma_p = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$$

Electrónica:

Este tipo de polarización se presenta en todos los materiales dieléctricos. Como se aprecia en la Fig. 12 a. resulta del desplazamiento del núcleo positivo del átomo respecto de la carga negativa ante la aplicación del campo eléctrico. Sólo existe cuando un campo externo existe.

Iónica:

Ocurre solo en materiales que son iónicos. La aplicación de un campo eléctrico desplaza los cationes en una dirección y los aniones en la dirección opuesta, como en la Fig. 12 b.

Orientada:

Solo se presenta en sustancias que poseen momentos dipolares permanentes. La polarización es producto de la rotación de los momentos en la dirección del campo aplicado. La alineación de los dipolos es contrarrestada por las vibraciones térmicas de los átomos, de tal forma que a medida que la temperatura aumenta, la polarización disminuye.

La polarización neta de una sustancia es la suma de estos 3 tipos de polarización:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_e + \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_o$$

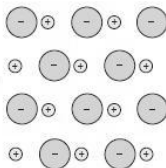
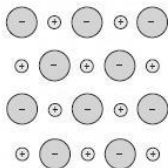
Sin campo aplicado



Con campo E aplicado



a)



b)



c)



A partir de lo visto para medios dieléctricos, se puede extender la ley de Gauss a campos en medios dieléctricos.

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{libre en } S} + Q_{\text{polarizac. en } S}}{\epsilon_0}$$

La carga de polarización puede escribirse como el flujo del vector de polarización a través de la superficie S . Reordenando los términos:

$$\int_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{libre en } S}$$

Se define el *vector desplazamiento eléctrico* como:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

De modo que la ley de Gauss puede expresarse apropiadamente para medios dieléctricos como:

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{libre en } S}$$

Si el dieléctrico es lineal, el vector **D** puede expresarse en función de la intensidad de campo eléctrico **E**:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) = \epsilon \mathbf{E}$$

En la última expresión, se define la permitividad relativa del dieléctrico como:

$$\epsilon_r = (1 + \chi_e(\mathbf{r}))$$

Vector de Magnetización

De manera análoga al vector de polarización, $\mathbf{P}$, en el caso de dieléctricos polarizados, se define el *vector de magnetización*, $\mathbf{M}$, que describe la densidad de los momentos magnéticos vectoriales de un material magnético. Si $\mathbf{m}$ es el momento magnético de los átomos individuales, la magnetización se define así:

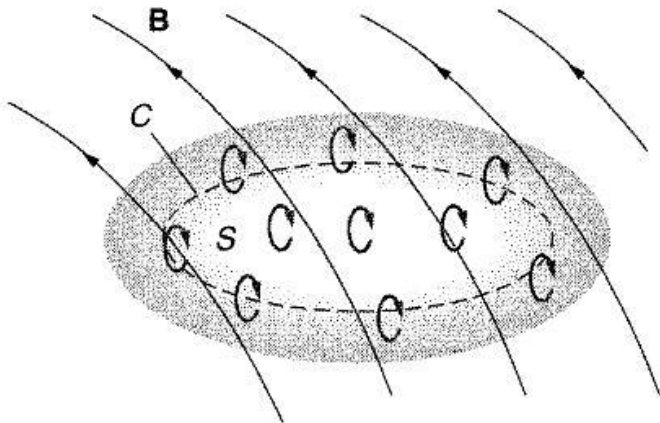
$$\mathbf{M} = \frac{\sum_{\Delta v} \mathbf{m}}{\Delta v}$$

Si la densidad volumétrica de corrientes elementales es N , el vector de magnetización puede escribirse como:

$$\mathbf{M} = N\mathbf{m}$$

La unidad del vector de magnetización es $\frac{A}{m}$

Ley de Ampere generalizada: Intensidad de campo magnético



Ley de Ampere generalizada: Intensidad de campo magnético

Se puede mostrar que la corriente total, vista como el aporte total de corriente de las espiras elementales que pasan a través de la superficie S está dada por:

$$I_{\text{elementales en } S} = \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

De modo que la ley de Ampere cuando existe una sustancia magnetizada, viene dada por la siguiente ecuación:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \right)$$

El contorno es el mismo para las integrales de línea que aparecen en la ecuación, por lo que puede reescribirse como:

$$\oint_C \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Ley de Ampere generalizada: Intensidad de campo magnético

La nueva cantidad vectorial definida como $\mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ tiene la particularidad de que solo depende de la corriente real, representada por $\mathbf{J}$, que circula por el contorno. El campo magnético en presencia de materiales es descrito por este nuevo vector, cuyo nombre es ***Intensidad de Campo Magnético, H*** . La ley de Ampere general es escrita entonces como:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Con

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

Ley de Ampere generalizada: Intensidad de campo magnético

La definición anterior es la mas general y es válida para cualquier material. En la mayoría de estos, $\mathbf{M}$ es una función lineal de $\mathbf{B}$, que es el campo que magnetiza el material. El vector de magnetización se expresa así:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

El factor χ_m es conocido como *susceptibilidad magnética* del material. A partir de lo anterior, se puede obtener una relación directa entre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

Donde a μ_r se le conoce como *permeabilidad relativa* y a μ como permeabilidad.

Los materiales magnéticos pueden ser *diamagnéticos*, si $\chi_m < 0$, o *paramagnéticos* si $\chi_m > 0$. Pese a esto, en ámbos casos $\mu_r \approx 1$, de modo que para efectos prácticos puede suponerse $\mu = \mu_0$.

Propiedades magnéticas básicas de los materiales

Materiales diamagnéticos

Los materiales *diamagnéticos*, al ser introducidos en un campo magnético, orientan sus momentos magnéticos en sentido opuesto al campo aplicado y con una magnitud muy pequeña. De este modo, la susceptibilidad magnética, χ_m , es negativa y la permeabilidad relativa es levemente inferior a la unidad. Ejemplos de estos materiales son:

- Agua, $\mu_r = 0,9999912$
- Bismuto, $\mu_r = 0,99984$
- Plata, $\mu_r = 0,999975$

Propiedades magnéticas básicas de los materiales

Materiales diamagnéticos

Este tipo de magnetización está presente en todos los materiales, sin embargo solo puede ser visto si los otros tipos de magnetización están completamente ausentes.

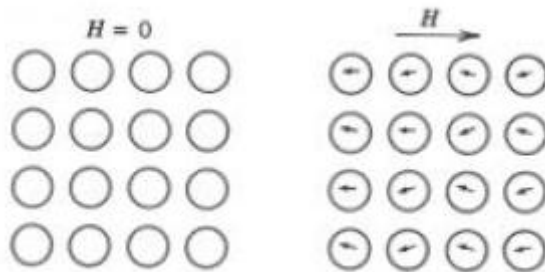


Figura: Orientación de los momentos magnéticos en un material diamagnético

Propiedades magnéticas básicas de los materiales

Materiales paramagnéticos

Los materiales paramagnéticos en ausencia de un campo externo, tienen sus momentos magnéticos orientados de aletoriamente. Al aplicarse un campo, sus dipolos sufren una débil orientación, que produce un campo magnético muy pequeño que se suma al campo externo. De este modo, χ_m es muy pequeño pero mayor que 0. Ejemplos de este tipo de materiales son:

- Aire, $\mu_r = 1,00000036$
- Aluminio, $\mu_r = 1,000021$

Propiedades magnéticas básicas de los materiales

Materiales paramagnéticos

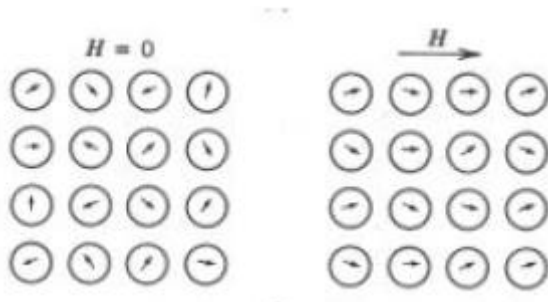


Figura: Orientación de los momentos magnéticos en un material paramagnético

Propiedades magnéticas básicas de los materiales

Materiales ferromagnéticos

Los materiales ferromagnéticos tienen las mas importantes aplicaciones magnéticas. En principio son materiales paramagnéticos, pero con fuertes interacciones entre sus átomos. Debido a esto, se forman grupos de átomos los que, en presencia de un campo magético externo, se orientan todos en la misma dirección. Estos grupos de átomos son conocidos como *dominios magnéticos*.

Al aumentar la magnitud del campo aplicado, los dominios tienden a alinearse con él, de manera que aumentan su tamaño y por lo tanto, el campo inducido aumenta.

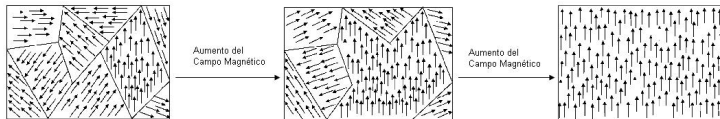


Figura: Esquema de los dominios magéticos de un material ferromagnético en presencia de un campo externo

Resumen Clase #7

- Polarización de los dieléctricos
- Campo Magnético en los materiales