EL3002-Electromagnetismo Aplicado

Clase No. 6: Separación de varibles

Marcos Diaz

Departamento de Ingeniería Eléctrica (DIE)
Universidad de Chile

13 de agosto de 2009

1. Resumen Clase #5
2. Método de separación de variables para la equación de Laplace
   - Sistema de coordenadas Cilíndricas (r, θ, z)
     - Caso de sistemas independientes de z
     - Caso de sistemas independientes de r y z
     - Caso de sistemas independientes de z y de θ
   - Sistema de Coordenadas esféricas: (r, θ, φ)
3. Resumen Clase #6

Resumen Clase #5

- Metodo de Separación de variables
  - Coordenadas rectangulares, (x, y, z)

En coordenadas cilíndricas, la ecuación de Laplace es:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \tag{81}$$

Postulamos una solución de la forma:

$$\phi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

sustituyendo:

$$\Theta(\theta)Z(z)\left[\frac{1}{r}\frac{dR(r)}{dr} + \frac{r^2}{R(r)}\frac{d^2R(r)}{dr^2}\right] + \frac{R(r)Z(z)}{r^2}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} + R(r)\Theta(\theta)\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = 0 \tag{82}$$

Dividiendo Ec. 82 por $R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ y multiplicando por r^2

$$\left[\frac{r}{R(r)}\frac{dR(r)}{dr} + \frac{r^2}{R(r)}\frac{d^2R(r)}{dr^2}\right] + \frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} + \frac{r^2}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = 0 \tag{83}$$

El segundo término de la ecuación anterior es función de θ solamente, y es el único dependiente de esta variable; luego, para que la igualdad se mantenga para cualquier valor de r, θ, y z, este término debe ser constante:

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} = \text{cte.} = -k_\theta^2 \Rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2} + k_\theta^2\Theta(\theta) = 0 \tag{84}$$

para que ϕ tenga valor único para $0 \leq \theta \leq 2\pi$, entonces $k_\theta^2 = n^2$ entero.

$$\Rightarrow \Theta(\theta) = B_1 sen(n\theta) + B_2 cos(n\theta) \quad \text{o} \quad \Theta(\theta) = B_1 e^{jn\theta} + B_2 e^{-jn\theta} \tag{85}$$

El resto de la ecuación queda, dividiendo por r^2:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{rR(r)}\frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{R(r)}\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{n^2}{r^2}\right)}_{-k_r^2} + \underbrace{\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}}_{-k_z^2} = 0 \tag{86}$$

$$(-k_r^2) + (-k_z^2) = 0 \tag{87}$$

Diferentes Casos

Caso 1

Se pueden distinguir entonces las siguientes situaciones:

Caso 1

Si $k_z = jk_r$ con k_r real, entonces:

$$Z(z) = C_1 senh(k_r z) + C_2 cosh(k_r z) \tag{88}$$

Si $z \to \infty$, se prefiere:

$$Z(z) = C_1 e^{-k_r z} \tag{89}$$

La ecuación restante queda:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) - \left(\frac{n^2}{r^2} + k_r^2\right)R(r) = 0 \tag{90}$$

que corresponde a la ecuación de Bessel y las dos soluciones independientes son llamadas funciones de Bessel de primer y segundo tipo, y orden n.

Diferentes Casos
Caso 1-Cont.

$$R(r) = A_1 J_n(k_r r) + A_2 Y_n(k_r r) \tag{91}$$

Donde

$$J_n(k_r r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[-1]^m}{m![n+m]!} \left[\frac{k_r r}{2}\right]^{n+2m} \tag{92}$$

es la función de Bessel de primer tipo y orden n

Diferentes Casos

Caso 1-Cont.

$$\begin{aligned} Y_n(k_r r) &= \frac{2}{\pi}\left[\gamma + Ln\frac{k_r r}{2}\right] J_n(k_r r) - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{[n-m-1]!}{m!}\left[\frac{2}{k_r r}\right]^{n-2m} \\ &- \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[-1]^m}{m![n+m]!}\left[\frac{k_r r}{2}\right]^{n+2m} \\ &\cdot \left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+m}\right] \end{aligned} \tag{93}$$

es la función de Bessel de segundo tipo de orden n y con $\gamma = 0,5772$.

Luego, si k_z es imaginario, k_r real, la solución general en coordenadas cilíndricas, en consecuencia queda:

$$\begin{aligned} \phi(r,\theta,z) = \sum_{n=0}^{\infty}[A_{1n}J_n(k_{rn}r) + A_{2n}Y_n(k_{rn}r)] \quad &\cdot \quad [B_{1n}sen(n\theta) + B_{2n}sen(n\theta)] \\ &\cdot \quad [C_{1n}senh(k_{rn}z) + C_{2n}cosh(k_{rn}\theta)] \end{aligned} \tag{94}$$

Diferentes Casos
Caso 2

Si k_z es real, luego k_r es imaginario, la solución en z será sinusoidal y en r se mantiene la ecuación de Bessel, pero con argumento imaginario; se adoptan nuevos símbolos para representar las funciones de Bessel de argumento imaginario:

$$I_n(x) = j^{-n}J_n(jx) = j^nJ_n(-jx) \quad \text{Función modificada de Bessel de primer tipo} \tag{95}$$

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2}j^{n+1}[J_n(jx)+jY_n(jx)] \quad \text{Función modificada de Bessel de segundo tipo} \tag{96}$$

$I_n(x)$ y $K_n(x)$ resultan reales cuando x es real.

En consecuencia la solución general queda:

$$\phi(r,\theta,z) = \sum_{n=0}^{infty}[A_{1n}I_n(k_{zn}r)] \cdot [B_{1n}sen(n\theta) + B_{2n}cos(n\theta)] \cdot [C_{1n}sen(k_{zn}z) + C_{2n}cos(k_{zn}z)] \tag{97}$$

Caso de sistemas independientes de z

Si el sistema es independiente de z (tiene simetría de traslación), entonces la ecuación diferencial se reduce a:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0 \tag{98}$$

Postulamos una solución de la forma:

$$\phi = R(r)\Theta(\theta)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial anterior, dividiendo por $R(r)\Theta(\theta)$ y multiplicando por r^2

$$\left[\frac{r}{R(r)}\frac{dR(r)}{dr} + \frac{r^2}{R(r)}\frac{d^2R(r)}{dr^2}\right] + \frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} = 0 \tag{99}$$

Caso de sistemas independientes de z

El segundo término de la ecuación anterior es función de θ solamente, y es el único dependiente de esta variable; luego, para que la igualdad se mantenga para cualquier valor de r y θ, este término debe ser constante:

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} = \text{cte.} = -n^2 \Rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2} + n^2\Theta(\theta) = 0 \tag{100}$$

$$\Rightarrow \Theta(\theta) = B_1 sen(n\theta) + B_2 cos(n\theta) \quad \text{o} \quad \Theta(\theta) = B_1 e^{jn\theta} + B_2 e^{-jn\theta} \tag{101}$$

El resto de la ecuación queda, dividiendo por r^2:

$$\left[r\frac{dR(r)}{dr} + r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2} + n^2R(r)\right] = 0 \tag{102}$$

cuya solución es de la forma:

$$R(r) = B_{1n}r^n + B_{2n}r^{-n} \tag{103}$$

Caso de sistemas independientes de z

La solución general entonces, cuando el sistema es independiente de la variable z, es:

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}[B_{1n}r^{n} + B_{2n}r^{-n}][A_{1n}sen(n\theta) + A_{2n}cos(n\theta)] \tag{104}$$

Caso de sistemas independientes de r y z

En este caso, la ecuación diferencial queda reducida a:

$$\frac{1}{r}\frac{d^2\phi(\theta)}{d\theta^2} = 0 \tag{105}$$

y por lo tanto la solución es de la forma:

$$\phi(\theta) = A\theta + B \tag{106}$$

Caso de sistemas independientes de z y de θ

Para sistemas con dependencia exclusiva de la variable r, la ecuación diferencial es:

$$\frac{d^2\phi(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi(r)}{dr} = 0 \tag{107}$$

cuya solución es de la forma:

$$\phi(r) = ALn(r) + B \tag{108}$$

En coordenadas esféricas la ecuación de Laplace es:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2 sen(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[sen(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{r^2 sen^2(\theta)}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0 \qquad (109)$$

Supongamos solución de la forma:

$$\phi(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

Sustituyendo y dividiendo por,

$$\frac{R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}{r^2 sen^2(\theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{sen^2\theta}{R(r)}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right] + \frac{sen\theta}{\Theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left[sen(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right] + \frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = 0 \qquad (110)$$

Para que esta igualdad se mantenga para cualquier valor de φ, el último término debe ser constante:

$$\frac{d\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2\Phi(\varphi) = 0 \tag{111}$$

Definimos: m^2 como la constante de separación. Para que Φ sea uni-valorada para $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ entonces m debe ser entero.

$$\Rightarrow \Phi(\varphi) = C_{1m}cos(m\varphi) + C_{2m}sen(m\varphi) \tag{112}$$

reemplazando la constante m^2 en la ecuación y dividiendo por $sen^2\theta$, resulta:

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right] + \frac{1}{\Theta(\theta)sen\theta}\frac{d}{d\theta}\left[sen(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right] - \frac{m^2}{sen^2\theta} = 0 \tag{113}$$

El primer término es sólo función de r y los restantes sólo función de θ, luego cada término debe ser igual a una constante. Elegimos la constante de separación $n(n+1)$ para el primer término:

$$\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right] - n(n+1)R(r) = 0 \tag{114}$$

Entonces:

$$R(r) = B_{1n}r^n + B_{2n}r^{-n+1} \tag{115}$$

y $\Theta(\theta)$ satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{d\theta}\left[sen(\theta)\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right] + \left[n(n+1)sen\theta - \frac{m^2}{sen^2\theta}\right]\Theta(\theta) = 0 \tag{116}$$

, la cual es conocida como la ecuación de Legendre.

La forma estándar de esta ecuación se obtiene haciendo la sustitución: $u = cos\theta$

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{du}\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{1-u^2}\frac{d}{du} \tag{117}$$

y la ecuación queda:

$$\frac{d}{du}(1-u^2)\frac{d\Theta(\theta)}{du} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-u^2}\right]\Theta(\theta) = 0 \tag{118}$$

Las soluciones independientes de esta ecuación se llaman funciones de Legendre de primer y segundo tipo cuando $m = 0$ o polinomios de Legendre cuando $m \neq 0$: $P_n^m(u)$ y $Q_n^m(u)$.

Los polinomios $Q_n^m(u)$ tienen singularidad en los polos $\theta = 0, \pi$ por lo tanto, si el eje polar forma parte de la región de interés $Q_n^m(u)$ no participa pues $Q_n^m(1)$ diverge.

La función generadora para los polinomios de Legendre de primer tipo es:

$$P_n^m(u) = \frac{[1-u^2]^{m/2}}{2^n n!}\frac{d^{n+m}[u^2-1]^n}{du^{n+m}} \tag{119}$$

Algunos polinomios son:

$$\begin{aligned}
P_0^0 &= 1 \\
P_1^0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{du}[u^2-1] = u = cos\theta \\
P_2^0 &= \frac{3}{2}cos^2\theta - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}[3u^2-1] \\
P_3^0 &= \frac{1}{2}[5cos^2\theta - 3cos\theta] = \frac{u}{2}[5u^2-3] \\
P_1^1 &= sen\theta = \sqrt{u^2-1} \\
P_2^1 &= \frac{3}{2}sen(2\theta) \\
P_n^m &= 0, \quad \text{para } m > n
\end{aligned} \tag{120}$$

Las siguientes propiedades de ortogonalidad se cumplen de forma similar a las funciones de Bessel:

$$\int_{-1}^{1} P_n^m P_l^m du = \int_0^{\pi} P_n^m P_l^m sen\theta d\theta = 0, \quad m \neq l \tag{121}$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^m P_n^l \frac{du}{1-u^2} = \int_0^{\pi} P_n^m P_n^l \frac{d\theta}{sen\theta} = 0, \quad m \neq l \tag{122}$$

$$\int_{-1}^{1} [P_n^m]^2 du = \int_0^{\pi} [P_n^m cos\theta]^2 sen\theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \frac{[m+n]!}{[n-m]!} \tag{123}$$

La solución general es entonces, cuando el eje forma parte de la región, es:

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}[A_m cos(m\varphi) + B_m sen(m\varphi)][C_n r^n + D_n r^{-[n+1]}]P_n^m(cos\theta) \quad (124)$$

En regiones que incluyen $r \rightarrow \infty \Rightarrow C_n = 0$ En regiones que incluyen $r \rightarrow 0 \Rightarrow D_n = 0$

Resumen Clase #6

- Metodo de Separación de variables
  - Coordenadas cilindricas, (r, θ, z)
  - Coordenadas esfericas, (r, θ, φ)