# EL3002-Electromagnetismo Aplicado

## Clase No. 3: Condiciones de borde

Marcos Diaz

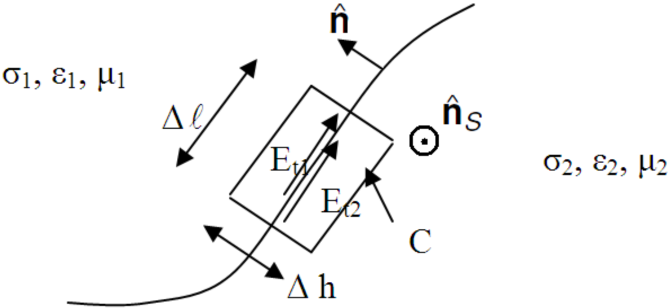
Departamento de Ingeniería Eléctrica (DIE)
Universidad de Chile

5 de agosto de 2009

1. Repaso Clase #2
2. Condiciones de borde de los campos para cambios de medio
   - Condición de borde general para **E**
   - Condición de borde general para **H**
   - Condición de borde general para D
   - Condición de borde general para **B**
3. Resumen Clase #3

# Repaso Clase #2

- Fuerzas Electromagnética
- Medios Materiales
  - Polarización Eléctrica
  - Polarización Magnética
- Clasificación de los distintos campos vector




Para el contorno $C$ que rodea la frontera de lados $\Delta l$ y $\Delta h$, aplicamos la ley de Faraday:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta h \to 0} \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} &= (E_{t1} - E_{t2}) \cdot l = \lim_{\Delta h \to 0} \left[ -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \right] \\ &= \lim_{\Delta h \to 0} \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \cdot (\Delta l \cdot \Delta h)\, \hat{\mathbf{n}}_S = 0 \end{aligned} \tag{33}$$

con $\hat{\mathbf{n}}_S$ la normal a la superficie creada por la curva cerrada.

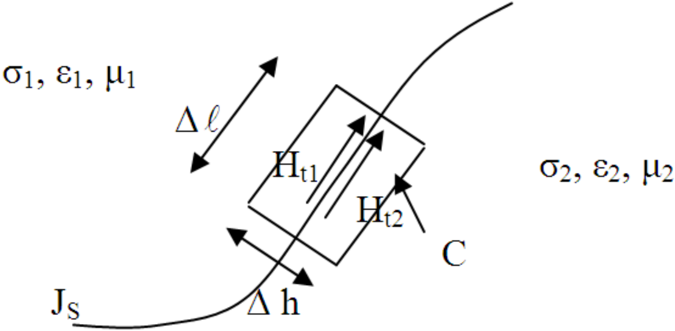
Luego:

$$E_{t1} = E_{t2} \tag{34}$$

O en forma vectorial:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0, \tag{35}$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario normal a la superficie **interfaz** entre ambos medios, en este caso es paralela al plano generado por la superficie $S$.




Para el contorno *C*, aplicamos la ley circuital de Ampere:

$$\oint_C \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_S \left( \mathbf{J}_c + \frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \tag{36}$$

$$\lim_{\Delta h \to 0} \oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = (\mathbf{H}_{1t} - \mathbf{H}_{2t}) \cdot \Delta l \tag{37}$$

Y:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta h \to 0} \int_S \left( \mathbf{J}_c + \frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} &= \lim_{\Delta h \to 0} \int_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} + \lim_{\Delta h \to 0} \int_S \left( \frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \lim_{\Delta h \to 0} (\mathbf{J}_c \Delta h) \cdot \Delta l \hat{\mathbf{n}}_S \end{aligned} \tag{38}$$

$$H_{1t} - H_{2t} = 0 \tag{39}$$

$$\lim_{\Delta h \to 0} \int_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\Delta h \to 0} (\mathbf{J}_c \Delta h) \cdot \Delta l \hat{\mathbf{n}}_S = \mathbf{J}_S \cdot \Delta l \hat{\mathbf{n}}_S \tag{40}$$

Siendo:

$$\lim_{\Delta h \to 0} (\mathbf{J}_c \Delta h) = \mathbf{J}_S \tag{41}$$

la densidad de corriente superficial en [$\mathrm{Am}^{-1}$].

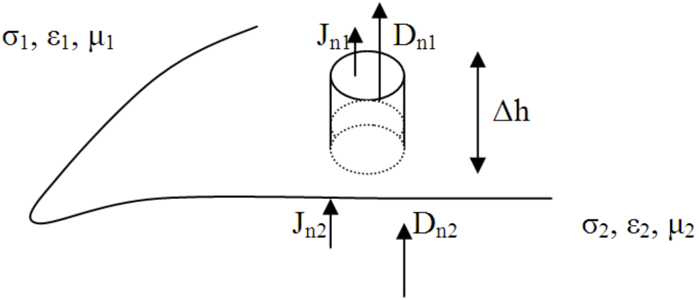
$$\mathbf{J}_V = \frac{I}{L\,\delta h} \quad \text{y} \quad \mathbf{J}_S = \frac{I}{L} \tag{42}$$

$$(H_{1t} - H_{2t}) = J_S \tag{43}$$

o en forma vectorial

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S \tag{44}$$

Consideremos dos medios dieléctricos con pérdidas, de parmetros $(\sigma_1, \mu_1, \epsilon_1)$ y $(\sigma_2, \mu_2, \epsilon_2)$ y su frontera común sobre lo cual se toma un pequeño volumen similar a una caja cilíndrica de área basal $S$ y altura $h$, compartida entre ambos medios.




Aplicando la ley de Gauss al volumen encerrado por la caja:

$$\oint_S (\epsilon \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dv \qquad (45)$$

Para encontrar la condición en la frontera, hacemos que $\Delta h \rightarrow 0$ , con lo cual la contribución al flujo de **D** en el manto del cilindro tiende a cero y sólo se mantiene la contribución en las bases superior e inferior del cilindro.

$$D_{n1} \cdot \Delta S - D_{n2} \cdot \Delta S = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\rho \Delta h) \Delta S \tag{46}$$

En el caso de que en alguno de los materiales exista una carga libre, haciendo tender $\Delta h \rightarrow 0$, aparece una densidad de carga libre superficial $\rho_S$ tal que:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\rho \Delta h) = \rho_S \tag{47}$$

La distribución de carga libre superficial se define como el límite de la distribucin de carga en una capa superficial de espesor finito *dh* de un conductor, cuando $dh \to 0$. La carga por unidad de área en la superficie, es decir, la densidad de carga superficial $\rho_S$ queda finita cuando $\rho \to 0$ y por lo tanto es singular en la superficie. Entonces se llega a:

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_S \tag{48}$$

o en forma vectorial:

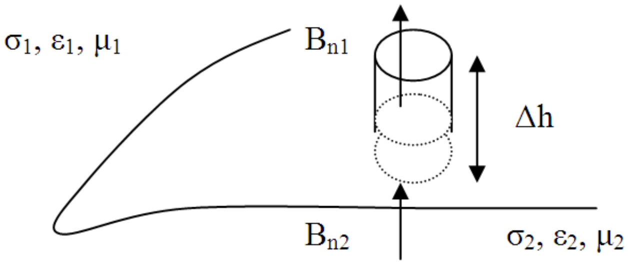
$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S \tag{49}$$

Luego, la componente normal del vector desplazamiento sufre un discontinuidad de magnitud igual a la magnitud de la densidad de carga superficial $\rho_S[\mathrm{Cm}^{-2}]$ que aparece en la frontera.

Naturalmente, si no existe carga libre (dieléctricos perfectos), entonces:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0 \tag{50}$$

La condición de borde para **B** se deduce aplicando la condición de campo magnético solenoidal y luego el teorema de la divergencia sobre un pequeño volumen similar a una caja cilíndrica de área basal $S$ y altura $h$, compartida entre dos medios de parámetros $(\sigma_1, \mu_1, \epsilon_1)$ y $(\sigma_2, \mu_2, \epsilon_2)$.




Aplicando la ley de Gauss al volumen encerrado por la caja:

$$\oint_S (\epsilon \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{51}$$

Tomando el límite de la integral cuando $\Delta h \rightarrow 0$ solo queda la contribución de las caras superior e inferior del cilindro. Por lo tanto:

$$(B_{n1} - B_{n2}) \cdot \Delta S = 0 \tag{52}$$

luego,

$$B_{n1} = B_{n2} \tag{53}$$

o bien en forma vectorial,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \tag{54}$$

# Problemas
## Equaciones de Continuidad

- Problemas

# Resumen Clase #3

## Equaciones de Continuidad

- De Faraday $\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$
- De Ampere $\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S$
- De Gauss Eléctrico $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S$
- De Gauss Magnético $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$

Con $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario normal a la superficie **interfaz** entre ambos medios.