EL3002-Electromagnetismo Aplicado

Clase No. 5: Solución analitica de la Ec. de Laplace y Poisson

Marcos Diaz

Departamento de Ingeniería Eléctrica (DIE)
Universidad de Chile

11 de agosto de 2009

1. Repaso Clase #4

2. Método de separación de variables para la equación de Laplace
   - Sistema de coordenadas rectangulares
     - Formas de solución generales

3. Resumen Clase #5

Repaso Clase #4
Energía

- Energía electrostática
- Energía magnetostática

Descripción General

$$\phi(u_1, u_2, u_3) = F(u_1)G(u_2)H(u_3) \tag{68}$$

En tres dimensiones, la ecuación de Laplace es separable en 11 sistemas de coordenadas diferentes, entre las cuales están:

- Rectangulares (x, y, z)
- Cilíndricas circulares (r, θ, z)
- Esféricas (r, θ, φ)
- Bicilíndricas (r, φ, z)
- - esferoidales alargadas (ν, θ, φ)
- esferoidales achatadas (ν, θ, φ)
- toroidales

Las condiciones de borde pueden ser

Dirichlet, Neumann y mixtas. Por el principio de unicidad, la solución de la ecuación de Laplace que satisface estas

condiciones de borde es única.

Coordenadas Rectangulares

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \tag{69}$$

Suponemos:

$$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{70}$$

Sustituyendo en Ec. 69 queda:

$$Y(y)Z(z)\frac{d^2X(x)}{dx^2} + X(x)Z(z)\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + X(x)Y(y)\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = 0 \tag{71}$$

Coordenadas Rectangulares

Dividiendo Ec. 71 por Ec. 70:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}=0 \tag{72}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2X(x)}{dx^2}+k_x^2X(x) &= 0\\ \frac{d^2Y(y)}{dy^2}+k_y^2Y(y) &= 0\\ \frac{d^2Z(z)}{dz^2}+k_z^2Z(z) &= 0 \qquad (73)\\ \text{con}\quad k_x^2+k_y^2+k_z^2=0 & \qquad (74)\end{aligned}$$

Las constantes de separación $-k_x^2$, $-k_y^2$ y $-k_z^2$ se determinan por las condiciones de borde aplicadas al potencial.

Coordenadas Rectangulares
Formas de solución generales-Caso 1

Si $k_x = 0$, $k_y \neq 0$ y $k_z \neq 0$ distintas de cero, entonces: $k_y^2 + k_z^2 = 0$. Si $k_x = 0$, implica

Coordenadas Rectangulares

Formas de solución generales-Caso 1

Si $k_x = 0$, $k_y \neq 0$ y $k_z \neq 0$ distintas de cero, entonces: $k_y^2 + k_z^2 = 0$. Si $k_x = 0$, implica

$$\frac{d^X(x)}{dx^2} = 0$$

Coordenadas Rectangulares

Formas de solución generales-Caso 1

Si $k_x = 0$, $k_y \neq 0$ y $k_z \neq 0$ distintas de cero, entonces: $k_y^2 + k_z^2 = 0$. Si $k_x = 0$, implica

$$\frac{d^X(x)}{dx^2} = 0$$

Entonces,

$$X(x) = A_1 x + A_2$$

una de estas constantes es real y la otra imaginaria pura. Si $k_y > 0$ y real, entonces la solución en y es,

Coordenadas Rectangulares
Formas de solución generales-Caso 1

Si $k_x = 0$, $k_y \neq 0$ y $k_z \neq 0$ distintas de cero, entonces: $k_y^2 + k_z^2 = 0$. Si $k_x = 0$, implica

$$\frac{d^X(x)}{dx^2} = 0$$

Entonces,

$$X(x) = A_1 x + A_2$$

una de estas constantes es real y la otra imaginaria pura. Si $k_y > 0$ y real, entonces la solución en y es,

$$Y(y) = B_1 sen(k_y y) + B_2 cos(k_y y) \tag{75}$$

Entonces k_z es imaginario puro y $|k_z| = k_y$. Por lo tanto la solución para $Z(z)$ puede colocarse:

$$\begin{array}{ll} \textbf{si z} \rightarrow \infty & Z(z) = C_1 e^{k_y z} + C_2 e^{-k_y z} \\ \textbf{si z es acotado} & Z(z) = C_1 senh(k_y z) + C_2 cosh(k_y z) \end{array}$$

Coordenadas Rectangulares

Formas de solución generales-Caso 1 Cont.

Por lo tanto, por el principio de superposición, son solución de la ecuación de Laplace todas las posibles combinaciones del tipo:

$$\phi_n(x,y,z) = [A_{1n}x + A_{2n}][B_{1n}sen(k_{yn}y) + B_{2n}cos(k_{yn}y)][C_{1n}e^{k_{yn}z} + C_{2n}e^{-k_{yn}z}] \quad (76)$$

Si k_z es real y k_y imaginario, las soluciones se invierten en las coordenadas z e y.

Coordenadas Rectangulares

Formas de solución generales-Caso 2

Si $k_x = k_y = 0$, entonces es necesario también que $k_z = 0$

Luego, para todas las coordenadas la solución será lineal:

$$\phi_n(x, y, z) = [A_{1n}x + A_{2n}][B_{1n}y + B_{2n}][C_{1n}x + C_{2n}] \tag{77}$$

Coordenadas Rectangulares

Formas de solución generales-Caso 3

Si k_x y k_y son constantes reales positivas, entonces la tercera constante es imaginaria:

$$k_z = \pm j\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

y la solución será:

$$\begin{aligned} \phi_n(x,y,z) &= [A_{1n}sen(k_{xn}x) + A_{2n}cos(k_{xn}x)] \cdot [B_{1n}sen(k_{yn}y) + B_{2n}cos(k_{yn}y)] \\ &\cdot \quad [C_{1n}senh(|k_{zn}|z) + C_{2n}cosh(|k_{zn}|z)] \end{aligned} \tag{78}$$

Si z es acotado, o bien:

$$\begin{aligned} \phi_n(x,y,z) &= [A_{1n}sen(k_{xn}x) + A_{2n}cos(k_{xn}x)] \cdot [B_{1n}sen(k_{yn}y) + B_{2n}cos(k_{yn}y)] \\ &\cdot \quad [C_{1n}e^{|k_{zn}|z} + C_{2n}e^{-|k_{zn}|z}] \end{aligned} \tag{79}$$

si la coordenada z se extiende indefinidamente.

Coordenadas Rectangulares

Solución general

En muchos problemas se encuentra que puede usarse una combinación de las diversas soluciones discutidas anteriormente. Además, las constantes de separación pueden tomar cualquier valor. La solución general para ϕ estará entonces dada por una suma sobre todas las posibles soluciones individuales.

$$\phi(x, y, z) = \sum_n \phi_n \tag{80}$$

Esta propiedad hace que la solución general sea extremadamente flexible como para satisfacer condiciones de borde arbitrarias.

Coordenadas Rectangulares

Ejemplo

Example

Resumen Clase #5

- Metodo de Separación de variables
  - Coordenadas rectangulares, (x, y, z)