EL3002-Electromagnetismo Aplicado

Clase No. 4: Energía

Marcos Diaz

Departamento de Ingeniería Eléctrica (DIE)
Universidad de Chile

6 de agosto de 2009

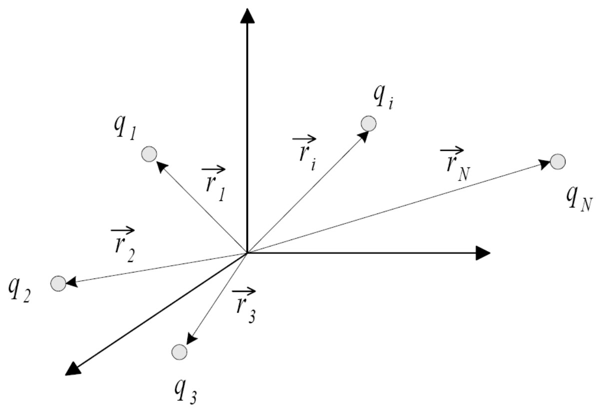
Repaso Clase #3

Equaciones de Continuidad

- De Faraday $\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$
- De Ampere $\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S$
- De Gauss Eléctrico $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S$
- De Gauss Magnético $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$

Con $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario normal a la superficie **interfaz** entre ambos medios.

Energía Electrostática



La energía se calcula trayendo desde infinito una a una cada caraga y calculando el trabajo necesario,

Energía Electrostática

$$
\begin{aligned}
U_{\text{inicial}} &= 0 \\
q_1 \to \mathbf{r}_1; \quad \Delta U_1 &= 0 \\
q_2 \to \mathbf{r}_2; \quad \Delta U_2 &= q_2\, \phi_1(\mathbf{r}_2) \\
q_2 \to \mathbf{r}_2; \quad \Delta U_2 &= q_3\, [\phi_1(\mathbf{r}_3) + \phi_2(\mathbf{r}_3)] \\
&\vdots \\
q_2 \to \mathbf{r}_2; \quad \Delta U_N &= q_N \sum_{i=1}^{N} \phi_i(\mathbf{r}_N)
\end{aligned} \tag{55}
$$

La energía total:

$$
U = \sum_{i=1}^{N} \Delta U_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \phi(\mathbf{r}_i) \tag{56}
$$

donde $\phi_j(\mathbf{r}_i)$ es el potencial creado por la carga q_j en el punto $\mathbf{r}_i$ y $\phi(\mathbf{r}_i)$ es el potencial para el potencial creado por todas la cargas excepto la que ocupa esa posición, q_i.

Energía Electrostática

Para un continuo de carga $\rho(\mathbf{r})$ es aplicable la misma filosofía, pero ahora en vez de agregar cargas puntuales tendremos que ir formando el sistema mediante diferenciales de carga. La expresión final de la energía en este caso será:

$$
U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) dv \left(+ \frac{1}{2} \int_S \sigma(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) dv \right) \tag{57}
$$

donde se agrega la integral de superficie en el caso de que exista también una densidad superficial de carga en la distribución.

Energía Electrostática

Energía Electrostática asociada al campo eléctrico

$$
\epsilon_0 \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})
$$

$$
\rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \phi(\mathbf{r}) \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) \tag{58}
$$

Utilizando la igualdad:
$\nabla \cdot (\phi \mathbf{E}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \phi \cdot \mathbf{E} = \phi(-\nabla^2 \phi) + (-|\mathbf{E}|^2)$ de donde se obtiene que: $-\phi \nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\phi \mathbf{E}) + |\mathbf{E}|^2$. Sustituyendo esta última ecuación en la Ec.58 y después en la Ec. 57 se obtiene:

$$
U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\int_V |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 dv + \int_V \nabla \cdot [\phi(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})] dv \right) \tag{59}
$$

Energía Electrostática

Energía Electrostática asociada al campo eléctrico

A partir de la Ec. 59 se podría extender el volumen de integración a todo el espacio, ya que el resultado no debe variar. Si integramos hasta el infinito la segunda integral se cancela:

$$
\int_V \nabla \cdot [\phi(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})] dv = \oint_{S\,inf} \phi(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{S} \to 0
$$

porque cuando $r \to \infty$ se tiene que $\phi \to 1/r$, $|\mathbf{E}| \to 1/r^2$ y $ds \to r^2$. La expresión final es:

$$
U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 dv \tag{60}
$$

Considerando un medio material y procediendo de manera analoga al realizado para el vacío se obtiene:

$$
U = \frac{1}{2} \int_{V\,\infty} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dv \tag{61}
$$

Energía Magnetostática

El flujo de campo magnético a través de una superficie es:

$$\phi_M = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{[Wb] (Weber)} \tag{62}$$

donde C es el contorno en que se apoya la superficie no cerrada S.

Ley de Faraday $\Rightarrow$ la existencia de una *f.e.m.* (con unidades de [V])

$$V = \frac{d\phi}{dt} = \underbrace{\frac{d\phi}{dI}}_{L} \frac{dI}{dt}$$

Energía Magnetostática

Energía Magnetostática asociada al campo eléctrico

$$L = \frac{d\phi_M}{dI} \quad \text{(H, henrios)} \tag{63}$$

$$d\phi_M = LdI$$

Cuando dos o más circuitos están próximos fisicamente, la variación de corriente en un circuito provoca la variación del flujo magnético que atarviesa al otro, o a los otros, dando origen a la inductancia mutua M_{ij}.

$$\begin{aligned} d\phi_1 &= L_1 dI_1 + M_{12} dI_2 \\ d\phi_2 &= M_{21} dI_1 + L_2 dI_2 \end{aligned} \tag{64}$$

En general $M_{ij} = M_{ji}$.

Energía Magnetostática

$$U_M = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} I_i \phi_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} I_i \sum_{j=1}^{N} M_{ij} I_j \quad \text{donde } M_{ii} = L_i \tag{65}$$

y para el caso de un único circuito:

$$U_M = \frac{1}{2} L I^2 \tag{66}$$

Energía Magnetostática

Energía Magnetostática asociada al campo magnéctico

Pasando a una situación más general, no necesariamente circuital, puede probarse que la energía magnética se escribe en la forma:

$$U_M = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv \tag{67}$$

Resumen Clase #4
Energía

- Energía electrostática
- Energía magnetostática

MIT applets **http://web.mit.edu/8.02t/www/802TEAL3D/**