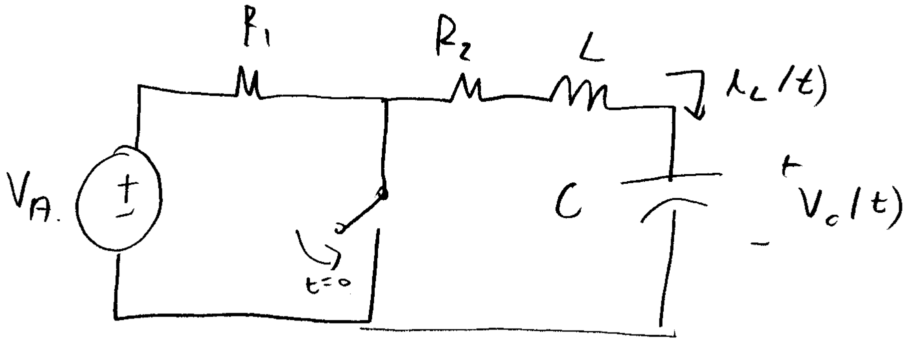
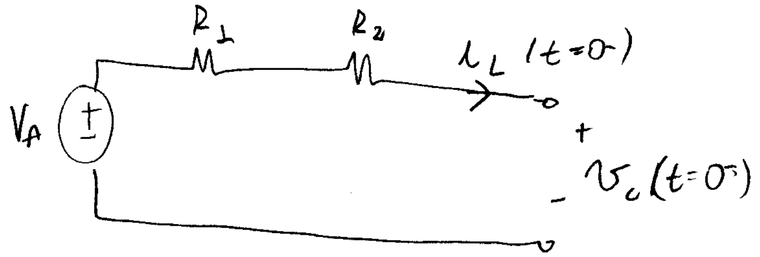
P1) Tarea 6. Capítulo 8. Circuitos RLC.

El interruptor de la figura ha estado abierto por un largo tiempo y se cierra en $t = 0$. Los parámetros del circuito son $R_1 = 2k\Omega$, $R_2 = 3k\Omega$, $L = 1H$, $C = 0{,}5\mu F$ y $V_A = 10V$. Encuentre $v_c(t)$ e $i_L(t)$ para $t \geq 0$ y determine el tipo de amortiguamiento del circuito.



Solución:

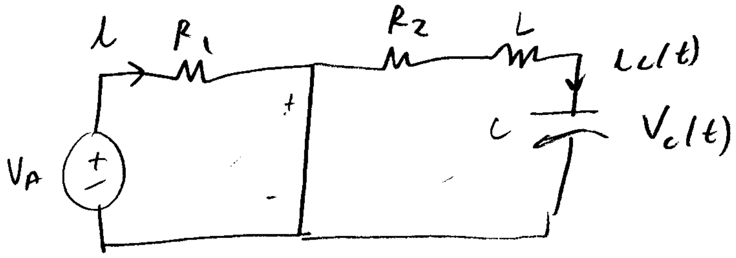
Para $t = 0^-$, el circuito llegó a un estado estacionario y el equivalente es:



La respuesta forzada del circuito en $t=0^-$ es entonces

$i_L(0^-) = 0$ y $v_c(0^-) = V_A = 10V$.

Al cerrar el switch El circuito es



y las condiciones iniciales $i_L(0) = 0$, $V_c(0) = 10$

LVK (1) $V_A = i R_1 + 0$

(2) $0 = R_2 i_L(t) + V_L(t) + V_c(t)$

$\Rightarrow i = \frac{V_A}{R_1} \Rightarrow \boxed{i = \frac{10}{2 \cdot 10^3} = 5\,mA}$

$0 = R_2\, i_L(t) + V_L(t) + V_c(t)$

LCK $\Rightarrow$ $i_L = i_c$, $i_c = C\frac{dV_c}{dt}$, $V_L = L\frac{di_L}{dt}$

La ec. para el voltaje es:

$$LC\frac{d^2 v_c}{dt^2} + R_2 C\frac{dv_c}{dt} + v_c = 0$$

como $i_L = i_c \Rightarrow \frac{dv_c}{dt} = \frac{i_L}{C}$ ∴ las condic. iniciales son

$v_c(0) = 10V$ y $\frac{dv_c}{dt}(0) = 0mA$

El polinomio característico es : $LCS^2 + R_2 C S + 1 = 0$

∴ las raíces son

$$S_{1,2} = \frac{-R_2 C \pm \sqrt{(R_2 C)^2 - 4LC}}{2LC} = \frac{-0{,}0015 \pm 0{,}0005}{0{,}000001}$$

$S_1 = -2000\,[1/seg]$ $S_2 = -1000\,[1/seg]$

- Entonces $v_c(t) = K_1 e^{-2000t} + K_2 e^{-1000t}$.

y como $(R_2C)^2 - 4LC = 2{,}5\cdot 10^{-7} > 0$ la solución es sobreamortiguada

Según las c.i: $v_c(0) = 10$ y $\frac{dv_c}{dt}(0) = 0$

$\Rightarrow$ $10 = K_1 + K_2$ y $0 = -2000K_1 - 1000K_2$

$K_1 = -10\ [V]$ $K_2 = 20\ [V]$

$$v_c(t) = -10e^{-2000t} + 20e^{-1000t}$$

$$i_c(t) = C\frac{dv_c}{dt} = 0{,}5\cdot 10^{-6}\left[2\cdot 10^4 e^{-2000t} - 2\cdot 10^4 e^{-1000t}\right]$$

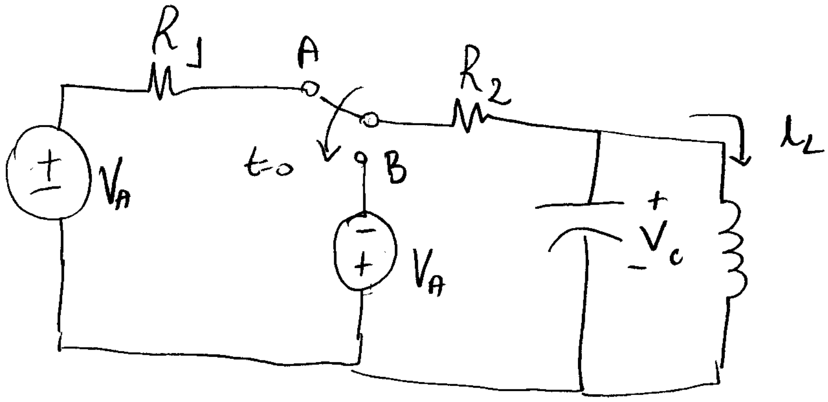
$$= 10\cdot 10^{-3}\left[e^{-2000t} - e^{-1000t}\right]\ [A]$$

y como $i_L(t) = i_c(t)$ $\Rightarrow$ $i_L(t) = 10\left[e^{-2000t} - e^{-1000t}\right]\ [mA]$

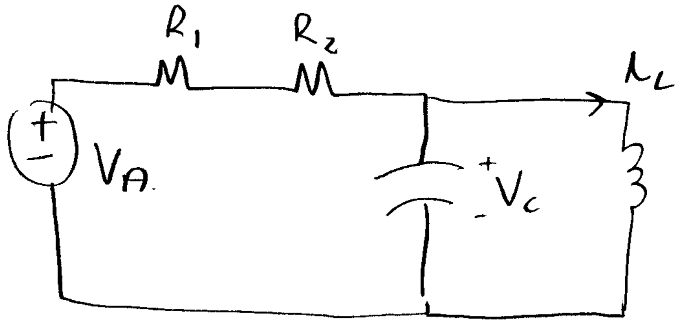
P2)

El circuito en la figura ha estado en la posición A por un largo tiempo. En $t=0$ el interruptor es movido a la posición B. Los parámetros del circuito son $R_1 = 1000\,\Omega$, $R_2 = 4000\,\Omega$, $L = 0{,}625\,H$ $C = 6{,}25\,nF$, $V_A = 15V$

- Encontrar $V_c(t)$ y $i_L(t)$ para $t>0$.
- Identifique los componentes forzado y natural de las respuestas y grafique $v_c(t)$ e $i_L(t)$.
- Cual es la amortiguación

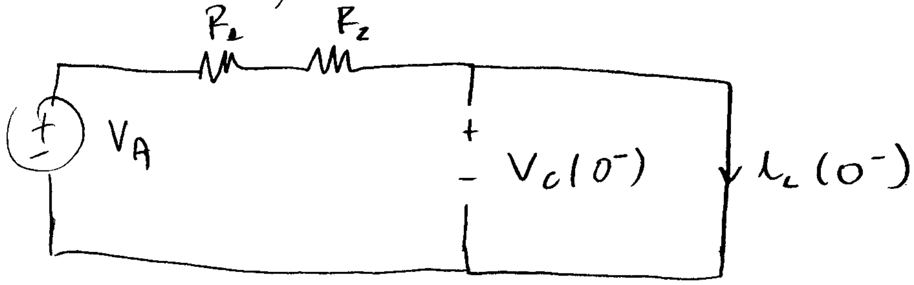


Solución: Para $t<0$ el circuito es



en $t=0^-$ se están en la condición estacionaria y el condensador está en CA y la inductancia en CC

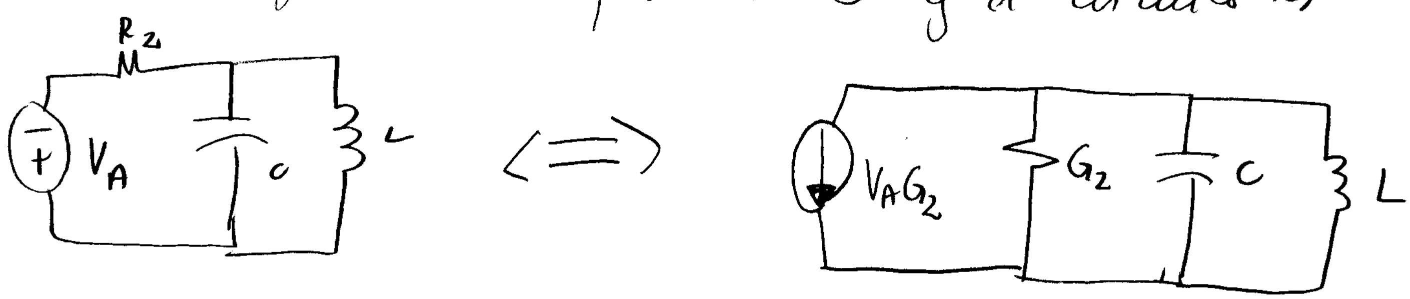
El circuito queda:



∞ o t

entonces $V_c(0^-) = 0$ y $i_L(0^-) = \dfrac{V_A}{R_1+R_2} = 3mA$

En $t = 0^+$ ya está en posición B y el circuito es



Circuito RLC paralelo equivalente con $R_2 = \dfrac{1}{G_2}$

La Ec de 2° orden es, para $i_L(t)$

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + G_2 L\frac{di_L}{dt} + i_L = -V_A G_2$$

La solución $i_L(t) = i_{LF}(t) + i_{LN}(t)$, R. forzada + R. natural

$i_{LF}(t) = -V_A G_2 = -15 \cdot \frac{1}{4000} = -3{,}75\, mA$

$i_{LN}(t)$ satisface $LC\dfrac{d^2 i_{LN}}{dt^2} + G_2 L\dfrac{di_{LN}}{dt} + i_{LN} = 0$

El polinomio cco: $LCs^2 + G_2 L s + 1 = 0$

$$s_{1,2} = \frac{-G_2L \pm \sqrt{(G_2L)^2 - 4LC}}{2LC}$$

Reemplazando los valores

$(G_2L)^2 - 4LC = 8{,}789 \cdot 10^{-9} > 0$, la respuesta es sobreamortiguada.

$$S_{1,2} = \frac{-0{,}000156 \pm 0{,}00009375}{7{,}8125 \cdot 10^{-9}}$$

$S_1 = -32\,000 \ [\frac{1}{seg}]$ $S_2 = -8\,000 \ [\frac{1}{seg}]$

luego $i_{LN}(t) = K_1 e^{-32000t} + K_2 e^{-8000t}$

$i_L(t) = K_1 e^{-32.000t} + K_2 e^{-8000t} - 3{,}75 \cdot 10^{-3}$

Las condiciones iniciales $\boxed{i_L(0) = 3mA}$ y $\frac{di_L}{dt}(0) = \frac{V_L(0)}{L}$

Luego como $V_C(t) = V_L(t)$ y $V_C(0) = 0$

$\boxed{\frac{di_L}{dt}(0) = 0}$

En la solución queda $3 \cdot 10^{-3} = K_1 + K_2 - 3{,}75 \cdot 10^{-3}$

$0 = -32000K_1 - 8000K_2$

$K_1 = -2{,}25 \cdot 10^{-3}$, $K_2 = 9 \cdot 10^{-3}$

$i_L(t) = -2{,}25 \cdot 10^{-3} e^{-32.000t} + 9 \cdot 10^{-3} e^{-8000t} - 3{,}75 \cdot 10^{-3}$ [A]

$V_C(t) = V_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = 45 \left(e^{-32.000t} - e^{-8000t} \right)$ [V]

El voltaje tiene solo respuesta natural porque $V_C(0) = 0$

Bornes $i_c(t) = C\frac{dv_c}{dt} = C\frac{dv_L}{dt} = -0{,}09\, e^{-32000t} + 0{,}00225 \cdot e^{-8000t}$

Graficos de $i_L(t)$ y $v_c(t)$