EL3001 - Análisis y Diseño de Circuitos Eléctricos

Auxiliar No. 1

Eduardo Pavez Carvelli
epavez@ing.uchile.cl

4 de agosto de 2009

Actividades

- Horario de consultas: Miércoles 12.00
- Resolución de Sistema de Ecuaciones
- Problemas Semana 1

Determinante

Si A es una matriz cuadrada de $n \times n$ con coeficientes complejos se escribe

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Determinante

Para cada matriz A, se define la matriz M_{ij} como la resultante de eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna de A. La resultante es de $(n-1) \times (n-1)$ y se escribe:

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Determinante

El determinante de una matriz cuadrada es una función definida de las matrices complejas de $n \times n$ en los complejos ($\mathbb{C}$).
El calculo se realiza con la fórmula recursiva de Laplace

1) Si $n = 1$, la matriz es $A = [a_{1,1}]$ y por lo tanto $\det(A) = a_{1,1}$
2) Si $n = 2$, la matriz es $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ y
   $\det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{2,1} \cdot a_{1,2}$

Determinante

3) Si $n \geq 3$, el determinante se calcula usando la fila i-ésima como:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})$$

o a través de la columna j-ésima:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})$$

La fórmula de Laplace indica además que el determinante no depende de la fila o columna que se escoja.
Otros métodos son: Descomposición LU o cálculo por bloques.

Propiedades

a) Si B y C son matrices cuadradas de $n \times n$, entonces:

$$\det(B \cdot C) = \det(B) \cdot \det(C)$$

b) Si A es invertible $\implies$ $\det(A) \neq 0$, o la proposición equivalente $\det(A) = 0 \implies A$ no es invertible.

c) Si A es invertible $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

d) Si A es diagonal (superior o inferior) su determinante es el producto de los elementos de la diagonal.

Método de Cramer

La matriz A de coeficientes complejos de $n \times n$, y los vectores x y b de tamaño n:

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \text{ y } b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$$

definen el sistema $A \cdot x = b$ con solución $x = A^{-1} \cdot b$.
Se define la matriz A_j de $n \times n$ la que resulta de reemplazar la columna j-ésima de A por el vector b:

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Fórmula de Cramer

La solución del sistema para la componente j-ésima de x se calcula:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$