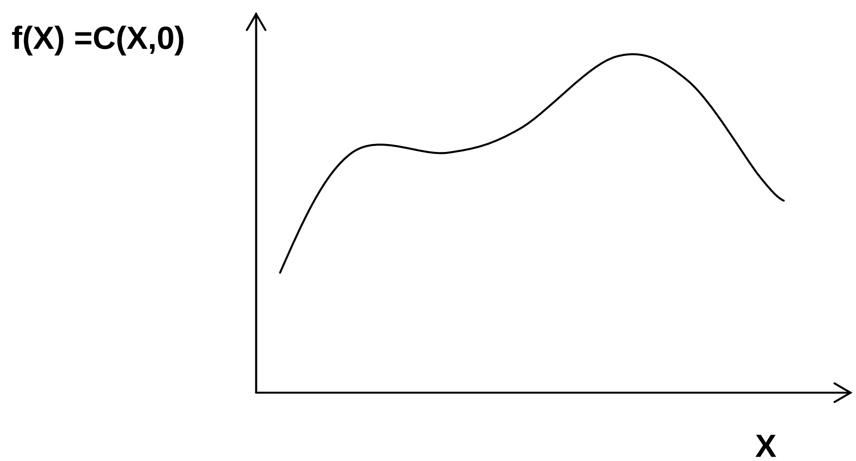
MODELOS PARA TRANSIENTES EN UNA DIMENSIÓN
por: Jorge Castillo G.

1.- Ecuación:

Si no hay reacción, la ecuación es

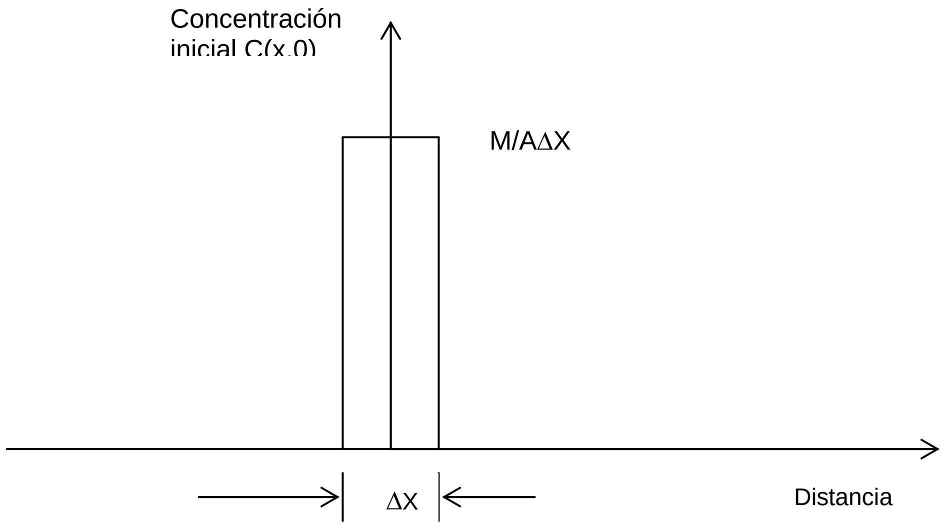
$$\frac{\partial C}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - U \frac{\partial C}{\partial x}$$

Solución analítica para $\mathbf{C_O} \;=\; \mathbf{C\,(x,0)} \;=\; \mathbf{f(x)}$



$$C\left(x,t\right) = \frac{1}{\sqrt{4\,\pi\varepsilon t}} \int_{=\infty}^{+\infty} f\left(v\right) e^{-\frac{\left(x-ut-v\right)^2}{4\varepsilon t}} \, dv$$

Aplicación a una descarga instantánea de masa **M:**



Bajo estas condiciones la ecuación queda**:**

$$C(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} \frac{M}{A\Delta x} e^{-\frac{(x-ut-v)^2}{4\varepsilon t}} dv$$

Si Δx es suficientemente pequeño, entonces

$$\int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} f(v)dv = \Delta x \cdot f(\bar{v})$$

Luego **:**

$$C(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\, e^{-\frac{(x-ut-v)^2}{4\varepsilon t}} dv = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{M}{A\Delta x} e^{-\frac{(x-ut-v)^2}{4\varepsilon t}} dv$$

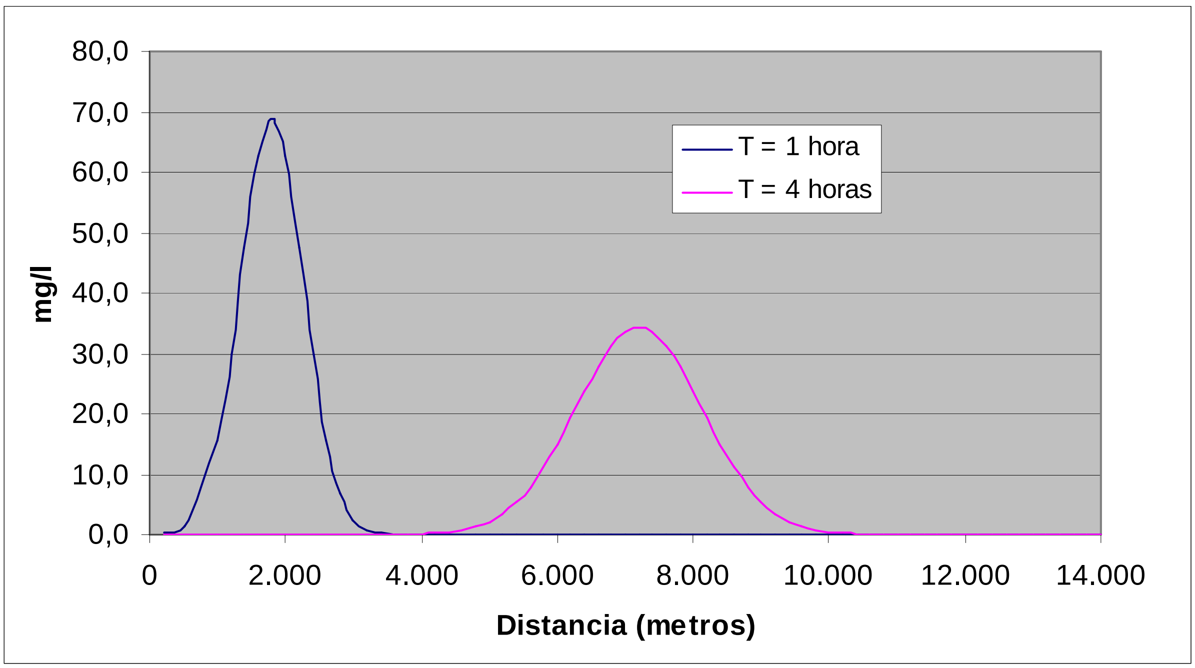
$$C(x,t) = \frac{M}{A \cdot \Delta x \cdot \sqrt{4\pi\varepsilon t}} \cdot \Delta x \cdot e^{-\frac{(x-ut-0)^2}{4\varepsilon t}} = \frac{M}{A\sqrt{4\pi\varepsilon t}} e^{-\frac{(x-ut)^2}{4\varepsilon t}}$$

Esta solución corresponde exactamente a una descarga inicial que adopta la forma de un delta de Dirac

$$f(v) = \frac{M}{A}\delta_D$$

Distribución a lo largo de un río para:

Masa contaminante:	800 Kilos
Sección transversal:	10 m^2
Coef. Dispersión:	30 m^2/seg
Velocidad:	0,5 m/s



Es una campana Gaussiana (para t = cte.) que se desplaza río abajo a la velocidad del río.

Su máxima valor decrece con $1/\sqrt{t}$

La campana se hace cada vez más ancha porque la masa total permanece constante.

Cálculo de la velocidad del río **: U = $\mathbf{X_{máx.}/t}$**

Cálculo del área transversal **:**

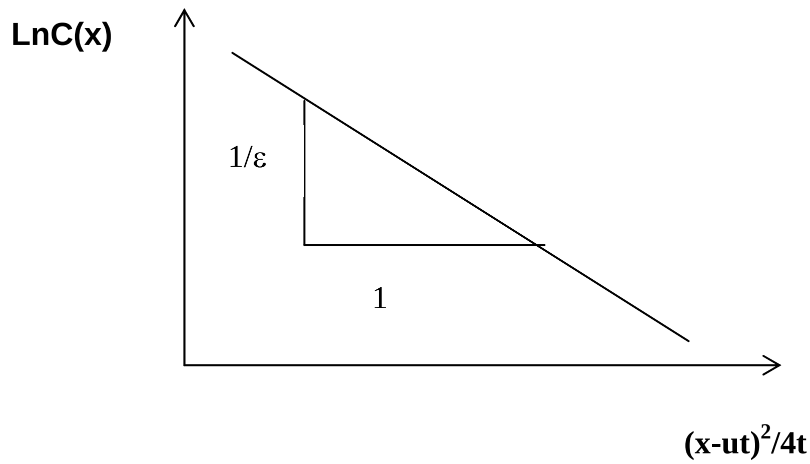
$$\int C(x) A dx = M$$

Luego

$$A = \frac{M}{\int C(x) dx}$$

Cálculo del caudal**: Q = UA**

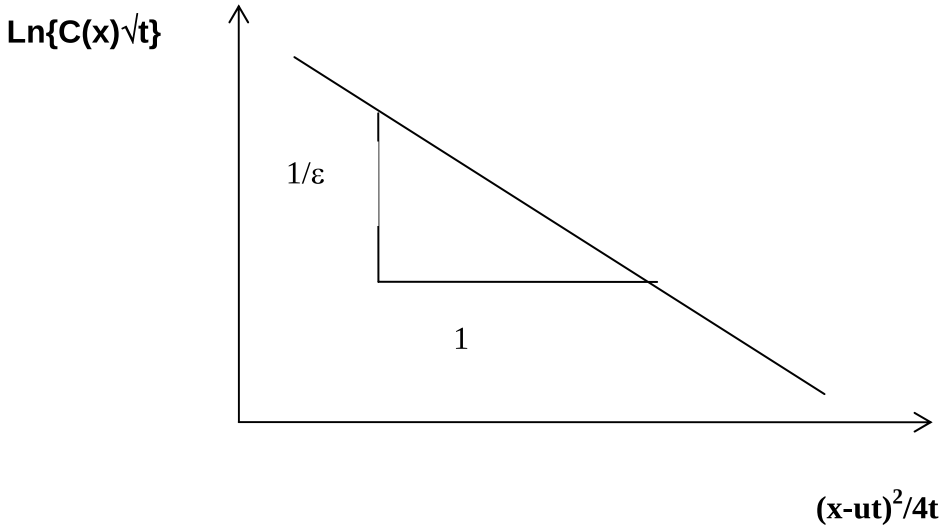
Cálculo del coeficiente de dispersión **:**



Distribución en el tiempo para x = x*

Estimación de la velocidad

En este caso el máximo no viaja a la velocidad del río, pero la función C(x*,t)· $\sqrt{t}$ sí tiene un máximo en x*/U, lo que permite calcular U como x*/t_{max}, Cálculo de ε



$$LnC\sqrt{t} = Ln\frac{M}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} - \frac{(x-ut)^2}{4\varepsilon t}$$

Si hay reacción, la ecuación es

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - U\frac{\partial C}{\partial x} - KC$$

y su solución analítica resulta ser:

$$C(x,t) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi\varepsilon t}}e^{-\frac{(x-ut)^2}{4\varepsilon t} - Kt}$$