Dinámica de Estructuras
Apuntes de Clase

Rubén Boroschek

REVISION D

Septiembre 2009

En el desarrollo de gráficas de estos apuntes contribuyeron:

Daniela Burgos M.

Luís Miranda

Cesar Urra

Los Alumnos del CI42G y CI72A Universidad de Chile

NOTA:

El texto esta en condición preliminar. Mis clases han sido transcritas inicialmente por los alumnos. He logrado revisar alguna de ellas. Si bien he tratado de eliminar los errores tipográficos, siempre se descubren nuevos. Por tanto úsese con cuidado.

El texto en amarillo no lo he revisado

El texto en azul no requiere ser leído para la comprensión del problema

INDICE

1. REFERENCIAS

Clough, R. y Penzien, J. “Dynamics of Structures”. McGraw – Hill. Segunda Edición, 1993.

Chopra, A. “Dynamics of Structures”. Prentice Hall. Tercera Edición, 2006.

2. FORMULARIO BASE

1 GDL

Equilibrio

Dinámico $m\ddot{v}(t)+c\dot{v}(t)+kv(t)=p(t)$

Frecuencia Angular: $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

Amort Crítico $c_{crítico}=2\sqrt{km}=2m\omega$

Razón Amort Crítico: $\beta=\frac{c}{c_c}=\frac{c}{2m\omega}$

Frec. Angular amortiguada; $\omega_D=\omega\sqrt{1-\beta^2}$

Respuesta a Condición Inicial:

$$v(t)=e^{-\beta\omega t}\left[\left(\frac{\dot{v}_0+v_0\beta\omega}{\omega_D}\right)\sin(\omega_D t)+v_0\cos(\omega_D t)\right]$$

Respuesta permanente Forzada:

$$m\ddot{v}(t)+c\dot{v}(t)+kv(t)=\begin{cases}P_0\sin(\bar{\omega}t-\theta)\\P_0\cos(\bar{\omega}t-\theta)\\P_0e^{i(\bar{\omega}t-\theta)}\end{cases}$$

$$v(t)=\underbrace{e^{-\omega\beta t}\left(A\sin(\omega_D t)+B\cos(\omega_D t)\right)}_{Transiente}+\underbrace{\frac{P_0}{k}D\begin{cases}\sin(\bar{\omega}t-\theta)\\\cos(\bar{\omega}t-\theta)\\e^{i(\bar{\omega}t-\theta)}\end{cases}}_{Permanente}$$

Factor de Amplificación Dinámica

$$D=\frac{1}{\left[\left(1-\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2\right)^2+\left(2\beta\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}}$$

Decremento Logarítmico: $\beta\approx\frac{\ln(v_i/v_{i+N})}{2\pi N}$

Integral de Duhamel:

$$v(t)=\frac{1}{m\omega_D}\int_0^t P(\tau)\exp(-\beta\omega(t-\tau))sen(\omega_D(t-\tau))d\tau$$

Coordenadas Generalizadas

$$m^*\ddot{z}(t)+c^*\dot{z}(t)+k^*z(t)=p^*(t)$$

Donde en general

$$m^*=\int_0^L m(x)[\phi(x)]^2dx+\sum_{n=i}^N M_n\phi(x_n)^2+\sum_{n=1}^N I_{0n}[\phi_{in}(x)']^2$$

$$c^*=\int_0^L c(x)[\phi(x)]^2dx+\sum_{n=1}^N c_n[\phi(x_n)]^2$$

$$k^*=\int_0^L k(x)[\phi(x)]^2dx+\int_0^L EI(x)[\phi'']^2dx+\sum_{n=1}^N k_n[\phi(x_n)]^2$$

$$p^*(t)=\int_0^L p(x,t)\phi(x)dx+\sum_{n=1}^N p(x_n)\phi(x_n)$$

Y $\omega^2=\frac{k^*}{m^*}$

N GDL

$$[M]\{\ddot{v}(t)\}+[C]\{\dot{v}(t)\}+[K]\{v(t)\}=\{P(t)\}$$

Rayleigh : $[C]=a[M]+b[K]$

$$\{v(t)\}=\sum_{i=1}^n y_i(t)\{\phi_i\}$$

$$\left[[K]-\omega_i^2[M]\right]\{\phi_i\}=\{0\}\Rightarrow\{\omega^2\},[\phi]$$

Obtenemos los parámetros modales

$M_i=\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_i\}$ i =1…n $K_i=\omega_i^2M_i$

$P_i(t)=\{\phi_i\}^T[P(t)]$ i = 1…n

Encontramos las condiciones iniciales para cada forma modal.

$$y_i(0)=\frac{\{\phi_i\}^T[M]\{v(0)\}}{M_i}\quad \dot{y}_i(0)=\frac{\{\phi_i\}^T[M]\{\dot{v}(0)\}}{M_i}$$

$\ddot{y}_i(t)+2\omega_i\beta_i\dot{y}_i(t)+\omega_i^2y_i(t)=P_i(t)/M_i$ i = 1…n

Respuesta

$$\{f_E(t)\}=\sum\omega_i^2[M]\{\phi_i\}y_i(t)=[M]\sum\omega_i^2\{\phi_i\}y_i(t)$$

$$\{v(t)\}=\sum y_i(t)\{\phi_i\}\quad\{\dot{v}(t)\}=\sum\dot{y}_i(t)\{\phi_i\}\quad\{\ddot{v}(t)\}=\sum\ddot{y}_i(t)\{\phi_i\}$$

Respuesta Sísmica:

Factor de Participación $L_i=\{\phi_i\}^T[M]\{r\}$

$$y_i(t)=\frac{L_i}{M_i\omega_i}V(\beta_i,\omega_i,\ddot{v}_g)$$

Fuerza Elástica $\{F_E(t)\}=\sum[M]\{\phi_i\}\left\{\frac{\omega_i^2L_i}{M_i\omega_i}V_i(t)\right\}$

Cortante Basal $Q(t)=\sum\frac{L_i^2}{M_i}\omega_iV_i(t)$

Aceleración de Piso: $\{\ddot{v}^T(t)\}\cong\sum\omega_i^2\{\phi_i\}Y_i(t)$

$$|v_i|=\{\phi_i\}\frac{L_i}{M_i}S_d(\beta_i,T_i)$$

3. INTRODUCCIÓN

La respuesta de estructuras se puede clasificar según el tipo de carga a la cual estén sometidas o por el tipo de respuesta que presenten. Las cargas pueden ser estáticas o dinámicas; las cargas dinámicas dependen del tiempo, de la posición y de su magnitud. La respuesta de una estructura, a su vez, puede ser estática o dinámica, si es dinámica actuarán en la estructura fuerzas de inercia, pudiendo estar presentes además fuerzas disipativas.

3.1.1. Demandas - Acciones:

Pull Back o Condiciones Iniciales: La estructura está sometida condiciones iniciales.

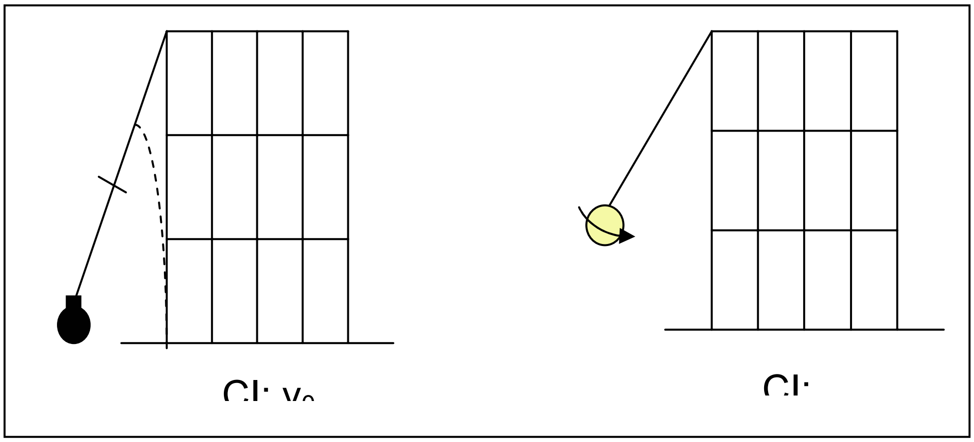


Figura 3.1

Figura 3.2

Ensayo de Impacto (salto grupal) sobre pasarela

Demanda Armónica: Demanda armónicas con período característico, T, $f(t) = f(t+T)$. La respuesta armónica simple puede ser la base de una respuesta dinámica compleja.

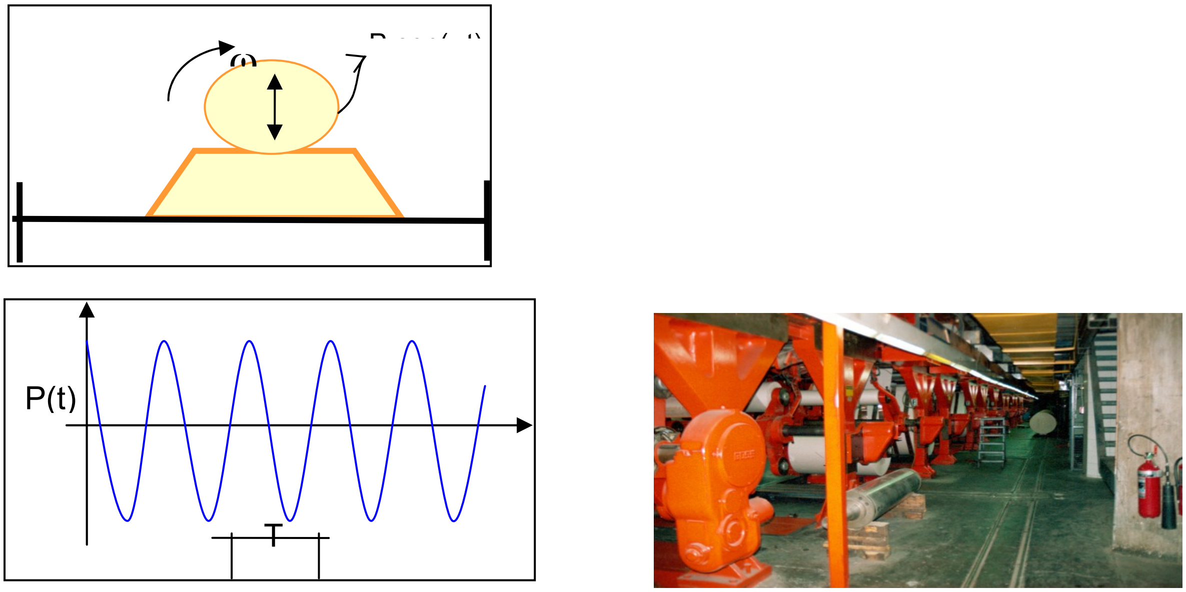


Figura 3.3

Acciones Periódicas No Armónicas: Presentan un periodo T característico, repitiéndose la función en el tiempo. Se pueden resolver como suma de armónicos por medio de series de Fourier.

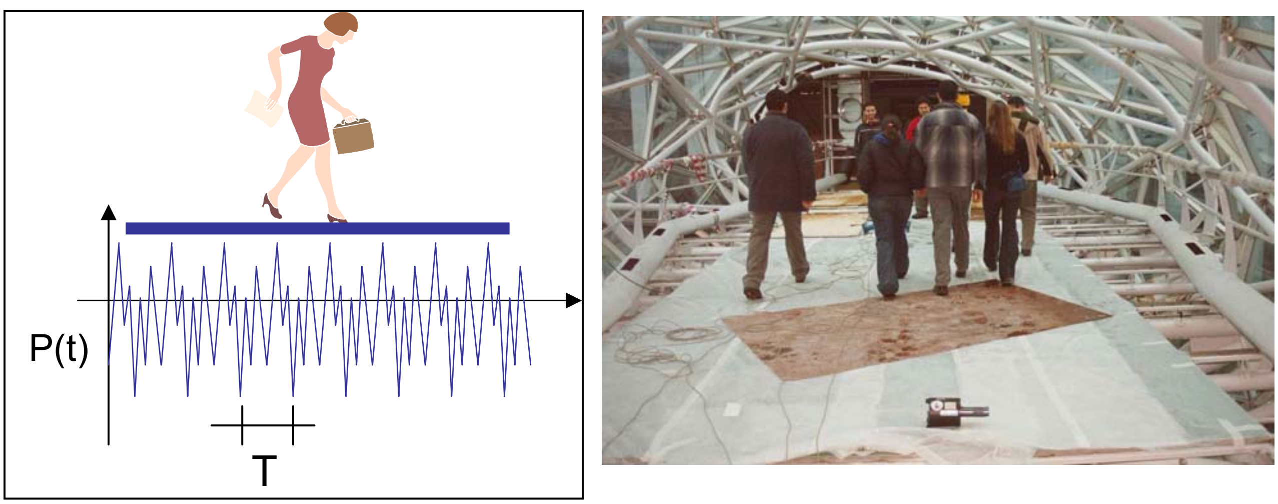


Figura 3.4

Impacto

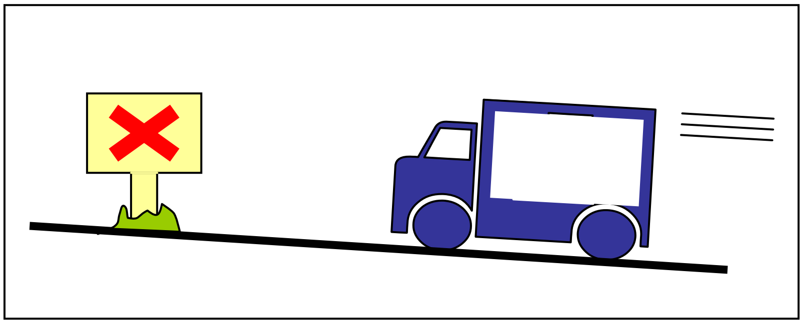


Figura 3.5

Demanda Arbitraria: No obedece a ningún patrón regular. Un ejemplo son los terremotos.

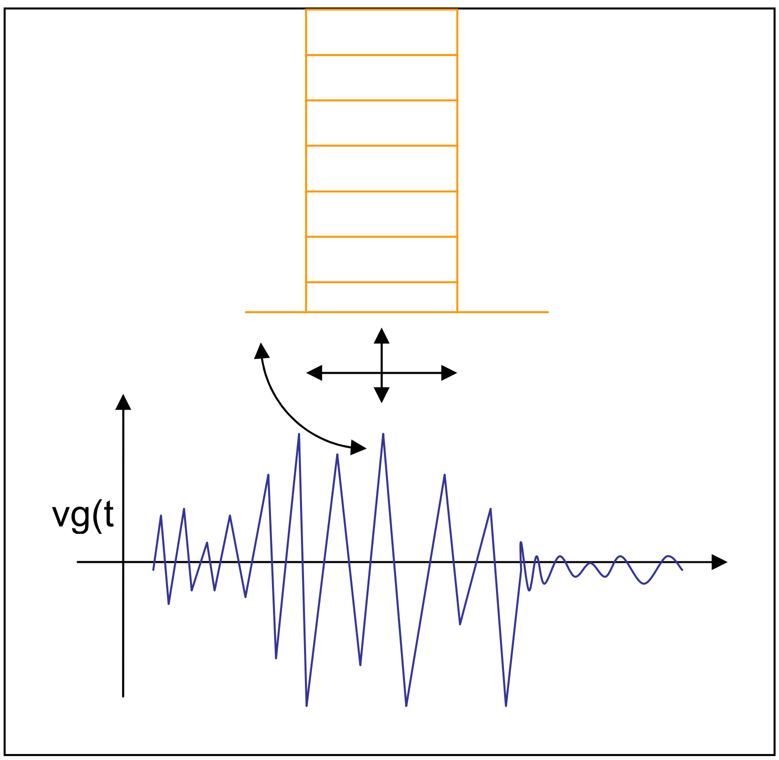


Figura 3.6

3.1.2. ¿Cómo modelar estructuras?

1. Por medio de discretización utilizando elementos uniaxiales.
2. Mediante ecuaciones diferenciales como la siguiente:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right)+m\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}=P(x,t)$$

3. Por medio de elementos finitos.
4. Usando coordenadas generalizadas, donde se establece una función de desplazamiento del tipo $v(x,t)=\sum\phi(x)\psi(t)$

3.1.3. Equilibrio

Para determina el estado de equilibrio de una estructura se pueden utilizar los siguientes métodos:

→ Métodos de Energía:

→ Suma de Fuerzas: $\sum Fx(t)$, $\sum Fy(t)$, $\sum Fz(t)$

$\sum Mx(t)$, $\sum My(t)$, $\sum Mz(t)$.

→ Trabajo Virtual.

4. SISTEMAS LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD

4.1. SISTEMAS DE UN GDL SIN AMORTIGUAMIENTO

Algunos ejemplos de sistemas de un GDL son los siguientes:

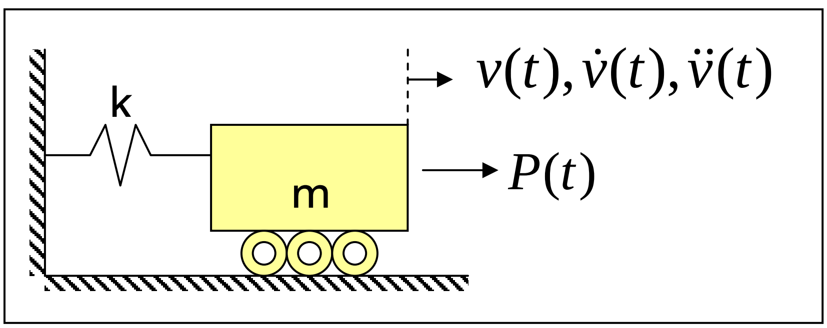


Figura 4.1

Ejemplo de sistema de 1GDL

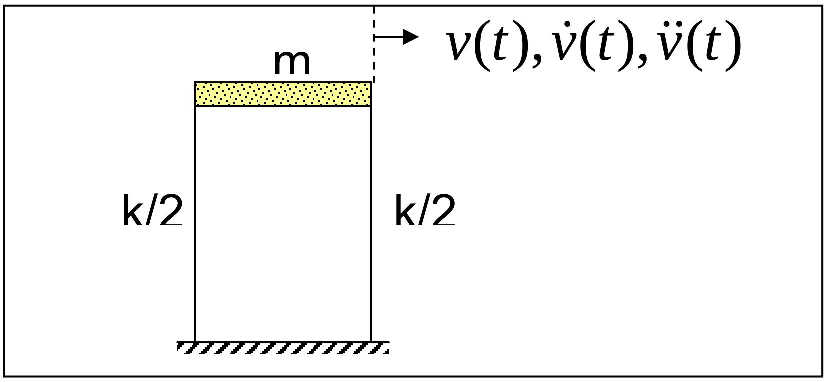


Figura 4.2

Ejemplo de sistema de 1GDL

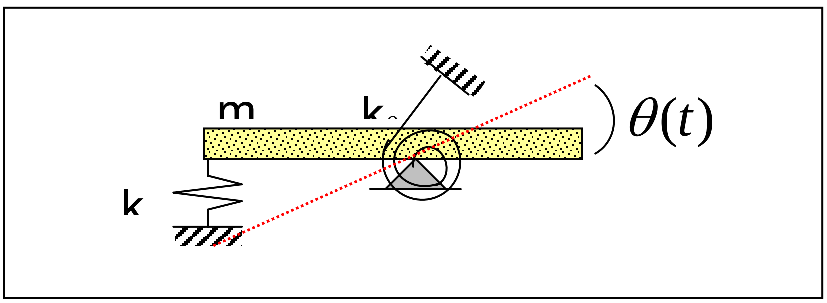
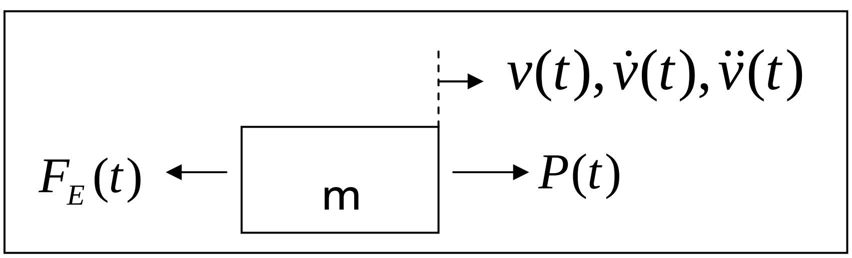


Figura 4.3: Ejemplo de sistema de 1GDL

- DCL (Diagrama de Cuerpo Libre):



Por la 2ª ley de Newton se tiene:

$$-F_E(t) + P(t) = m\ddot{v}(t)$$

Donde:

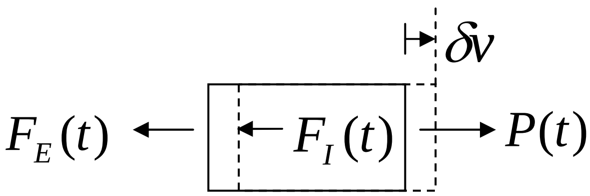
$F_E(t) = kv(t)$: Fuerza elástica

Utilizando Principio de D'Alambert: fuerza de inercia $F_I(t) = m \cdot \ddot{v}(t)$ que va en dirección opuesta al movimiento:

$$F_I(t) + F_E(t) = P(t)$$

$$\Rightarrow m\ddot{v}(t)+kv(t)=P(t)$$

La ecuación 2.1 describe el movimiento de un sistema de 1GDL sin amortiguamiento en forma general. Esta ecuación se puede obtener, también, aplicando el Principio de Trabajos Virtuales, como se muestra a continuación:



Para un sistema en equilibrio se debe cumplir que: $\delta W = 0$

Para el sistema mostrado se tiene:

$$\delta W = P(t)\delta v - F_E(t)\delta v - F_I(t)\delta v = 0$$

$$\Rightarrow F_I(t)+F_E(t)=P(t)$$

4.2. RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO,

$$m\ddot{v}(t)+kv(t)=P(t)$$

$v(t)=v_h(t)+v_p(t)$, donde $v_h(t)$ es la solución homogénea y $v_p(t)$ es la solución particular.

<u>Solución homogénea:</u>

$$m\cdot\ddot{v}(t)+kv(t)=0$$

$$\Rightarrow v(t)=A\sin(Ct)+B\cos(Dt)$$

Donde : $v_1(t)=A\sin(Ct)$

$v_2(t)=B\cos(Dt)$

Reemplazando $v_1(t)$ en la ecuación 2.2:

$$-mAC^2\sin(Ct)+kA\sin(Ct)=0$$

$$\Rightarrow A\left[-mC^2+k\right]=0 \qquad\qquad \Rightarrow C=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Del mismo modo con $v_2(t)$:

$$-mBD^2\cos(Dt)+kB\cos(Dt)=0$$

$$\Rightarrow B\left[-mD^2+k\right]=0 \qquad \Rightarrow D=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Entonces, $C=D=\omega$, donde $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ [rad/seg] es la frecuencia angular natural del sistema.

Entonces la solución homogénea del sistema está dada por:

$$v_h(t)=A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t) \qquad \text{(ecc. 2.3)}$$

4.3. ANÁLISIS DE SISTEMAS DE OSCILACIÓN LIBRE

Para un sistema con $P(t)=0$ se tiene que $v_p(t)=0$. Si este sistema tiene como condiciones iniciales $v(0)=v_0$ y $\dot{v}(0)=\dot{v}_0$, se obtiene:

$$v(0)=A\sin(0)+B\cos(0)=v_0 \Rightarrow B=v_0$$

$$\dot{v}(t)=A\omega\cos(\omega t)-B\omega\sin(\omega t)$$

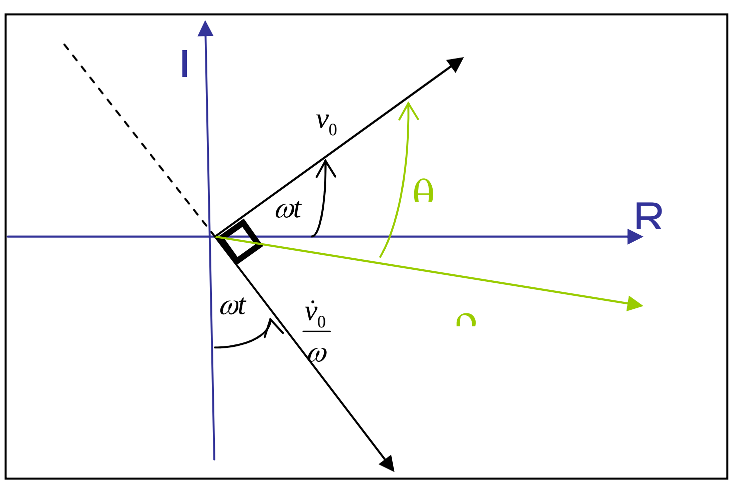
$$\dot{v}(0)=A\omega\cos(0)-B\omega\sin(0)=\dot{v}_0 \Rightarrow A=\frac{\dot{v}_0}{\omega}$$

Luego, la solución está dada por:

$$v(t)=\frac{\dot{v}_0}{\omega}\sin(\omega t)+v_0\cos(\omega t)$$

Al ver un sistema de este tipo vibrar se observa la suma de las proyecciones de los vectores sobre el eje real.

$$v(t)=\frac{\dot{v}_0}{\omega}\sin(\omega t)+v_0\cos(\omega t)$$

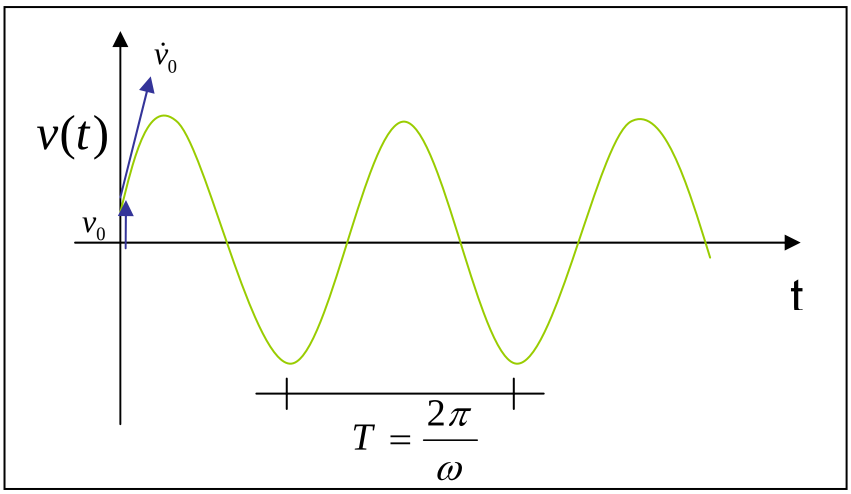


Del gráfico anterior se tiene que:

$$\rho = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{\dot{v}_0}{\omega}\right)^2} \qquad \theta = arctg\left(\frac{\dot{v}_0}{\omega v_0}\right)$$

Luego el desplazamiento se puede escribir como:

$$v(t) = \rho\cos(\omega t - \theta)$$



$$f = \frac{1}{T}$$

Figura 4.4: Desplazamiento versus tiempo.

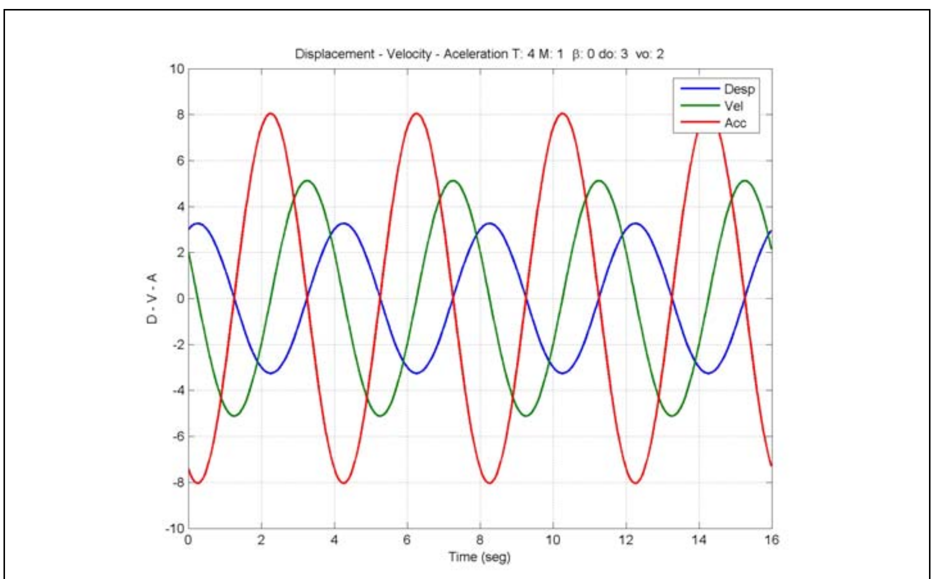


Figura 4.5dinaDespinicial.m

En resumen, para el sistema en análisis se tiene:

Desplazamiento: $v(t) = \rho\cos(\omega t - \theta)$

Velocidad: $\dot{v}(t) = -\rho\omega\sin(\omega t - \theta)$

Aceleración: $\ddot{v}(t) = -\rho\omega^2\cos(\omega t - \theta) = -\omega^2 v(t)$

Las condiciones iniciales generan el desfase aparente del armónico.

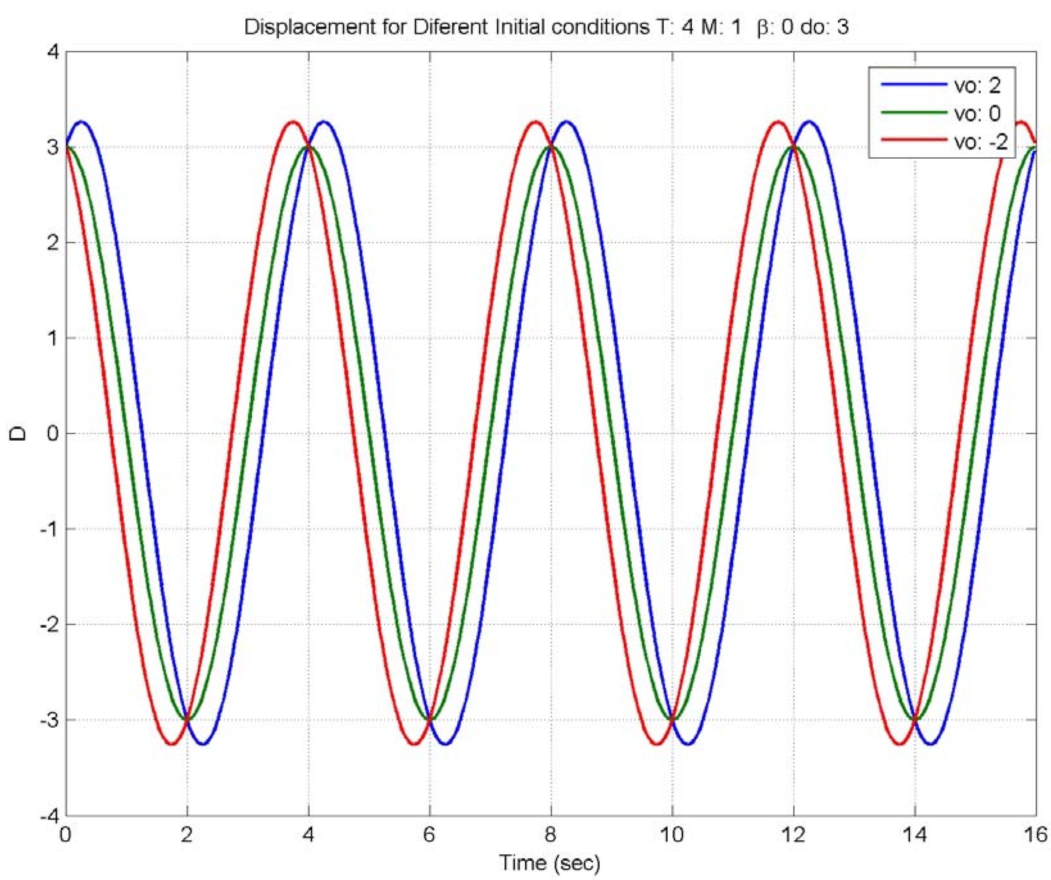


Figura 4.6 Desfase asociado a condiciones iniciales

Al graficar los vectores de desplazamiento, velocidad y se desprende que para un desplazamiento máximo la velocidad debe ser nula, mientras que para máxima velocidad el desplazamiento debe ser cero.

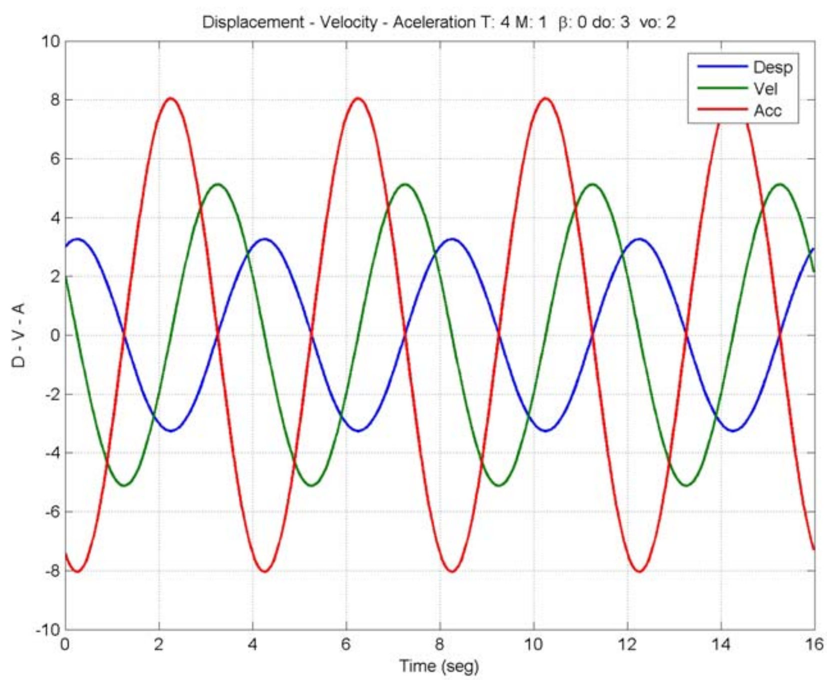
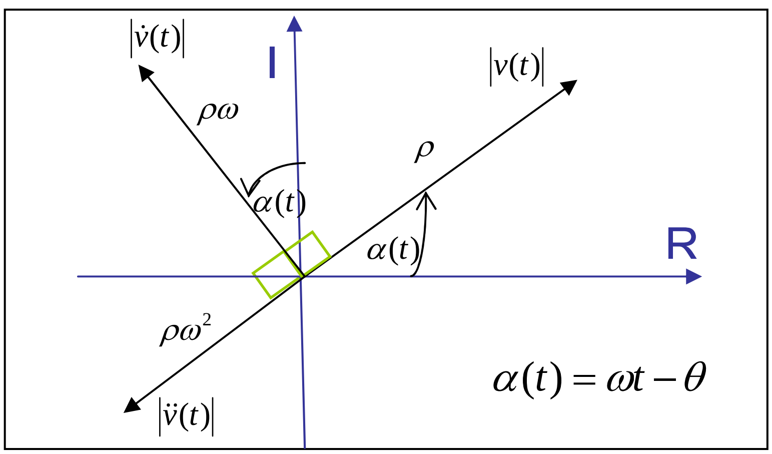


Figura 4.7 Comparación en el tiempo de fase para desplazamiento, velocidad y aceleración. Sin amortiguamiento y bajo condiciones iniciales.



4.4. PESO EN LA ECUACION DE MOVIMIENTO

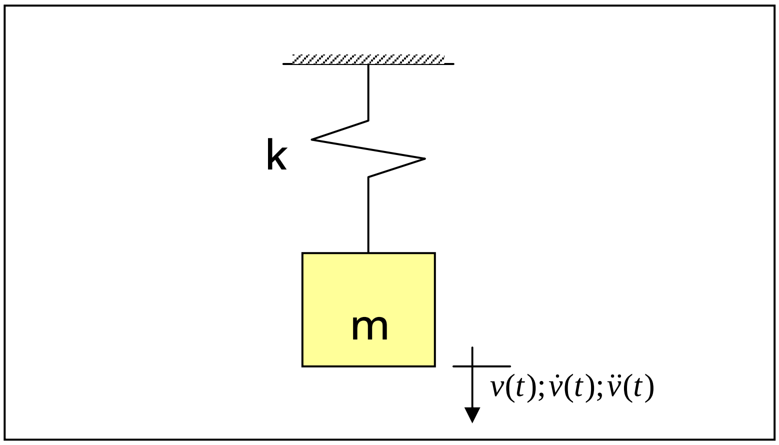
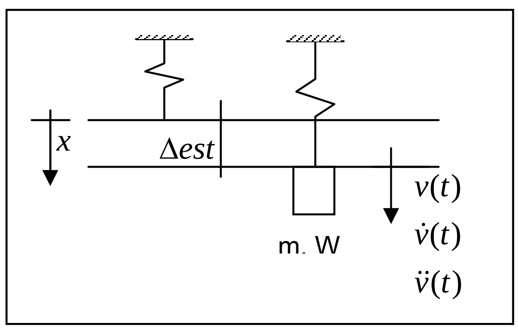


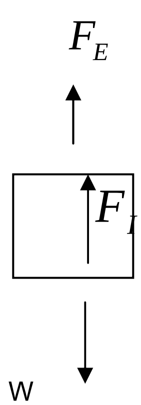
Figura 4.8: Ejemplo de sistema de 1GDL

Al realizar el equilibrio el sistema mostrado en la figura:

$$x(t) = v(t) + \Delta est$$
$$\dot{x}(t) = \dot{v}(t)$$
$$\ddot{x}(t) = \ddot{v}(t)$$



El DCL del cuerpo es:



Donde:

$$F_E = kx(t) = kv(t) + k\Delta_{est}$$
$$F_I = m\ddot{x}(t)$$
$$k\Delta_{est} = W$$

Luego: $\sum F = 0 \Rightarrow kv(t) + k\Delta_{est} + m\ddot{v}(t) = W$

$$\Rightarrow kv(t) + m\ddot{v}(t) = 0$$

En este caso el peso no se considera.

<u>Ejemplo:</u>

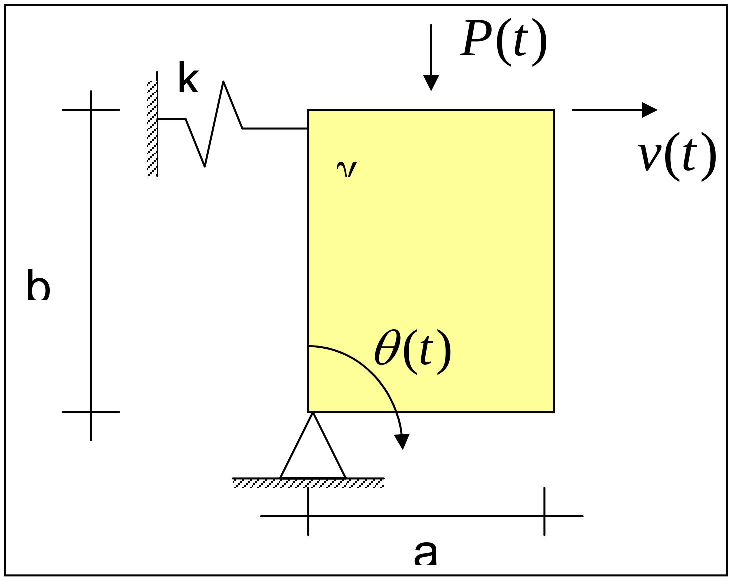


Figura 4.9: Ejemplo de sistema de 1GDL

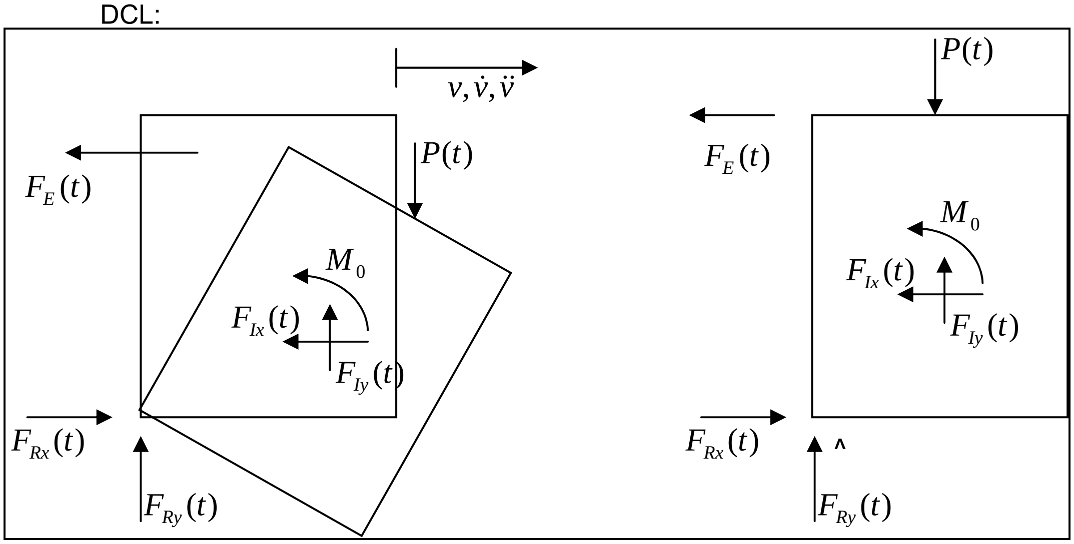
En este caso $v(t) = b\theta(t)$ y las ecuaciones de movimiento a obtener son,

$$m^{*\prime}\ddot{\theta}(t) + k^{*\prime}\theta(t) = P^{*\prime}(t)$$

$$m^{*}\ddot{v}(t) + k^{*}v(t) = P^{*}(t)$$

Donde m*, k* y P*(t) son formas generalizadas de la masa, la elasticidad y la solicitación del sistema.

DCL:



Entonces:

$$\sum M_A = 0 = F_E(t)b + F_{Ix}(t)\frac{b}{2} + F_{Iy}(t)\frac{a}{2} + M_0(t) - P(t)\frac{a}{2}$$

Además:

$$F_E(t) = kv(t) \quad F_{Ix}(t) = \gamma ab\frac{\ddot{v}(t)}{2}$$

$$F_{Iy}(t) = \gamma ab\ddot{\theta}(t)\frac{a}{2} = \gamma ab\frac{\ddot{v}(t)}{b}\frac{a}{2} = \gamma a^2\ddot{v}(t)$$

$$M_0(t) = I_0\ddot{\theta}(t) = \frac{\gamma ab}{12}\left(a^2+b^2\right)\frac{\ddot{v}(t)}{b} = \frac{\gamma a\left(a^2+b^2\right)}{12}\cdot\ddot{v}(t)$$

$$\Rightarrow P(t)\frac{a}{2} = bkv(t) + m\frac{b}{4}\ddot{v}(t) + m\frac{a^2}{4b}\ddot{v}(t) + m\frac{a^2+b^2}{12b}\ddot{v}(t)$$

$$k^* = kb \quad P^*(t) = P(t)\frac{a}{2}$$

$$m^* = m\left(\frac{b}{4} + \frac{a^2}{4b} + \frac{a^2+b^2}{12b}\right)$$

4.5. ENERGÍA

Para un sistema en oscilación libre la ecuación de movimiento es $m\cdot\ddot{v}(t) + k\cdot v(t) = 0$, si se integra esta ecuación en función de v se tiene:

$$\int dv * \left\{F_I(t) + F_E(t) = 0\right\}$$

$$\Rightarrow \int m\ddot{v}(t)dv + \int kv(t)dv = 0$$

Resolviendo las integrales: $\displaystyle\int kv(t)dv = \frac{1}{2}kv^2\Big|_{ti}^{t2}$

$$\int m\ddot{v}(t)dv = \int m\frac{d^2v}{dt^2}dv\frac{dt}{dt} = \frac{1}{2}m\dot{v}^2\Big|_{t1}^{t2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{v}(t)^2\Big|_{t1}^{t2} + \frac{1}{2}kv(t)^2\Big|_{t1}^{t2} = \Delta E = 0$$

Luego:

$$\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{v}(t)^2}_{Energía\_cinética} + \underbrace{\frac{1}{2}kv(t)^2}_{Energía\_potencial} = E_c$$

Entonces la energía del sistema, E_c , es constante.

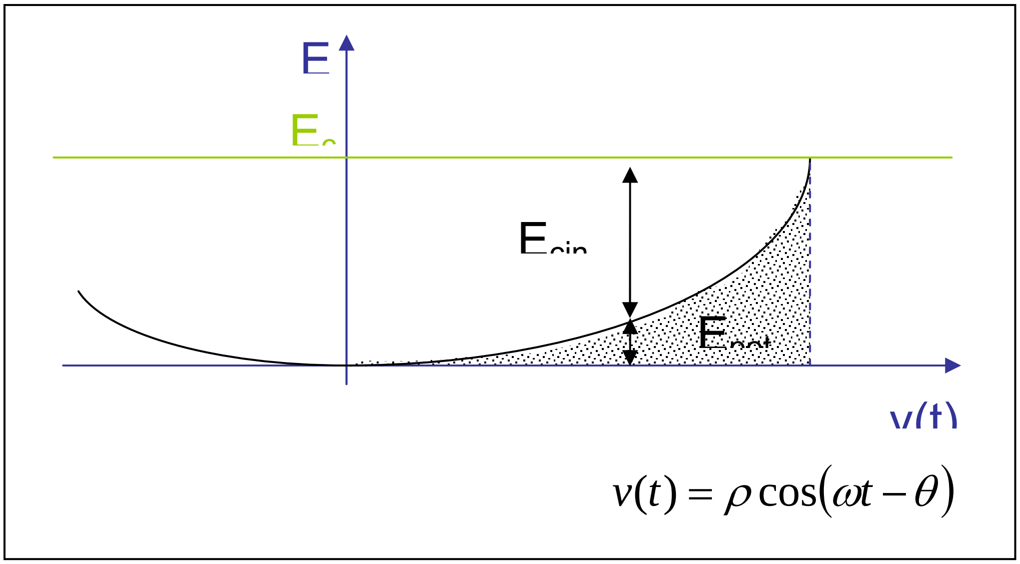


Figura 4.10: Gráfico Energía versus desplazamiento.

4.6. SISTEMAS DE UN GDL CON AMORTIGUAMIENTO

Los sistemas con amortiguamiento son aquellos donde actúan fuerzas disipativas.

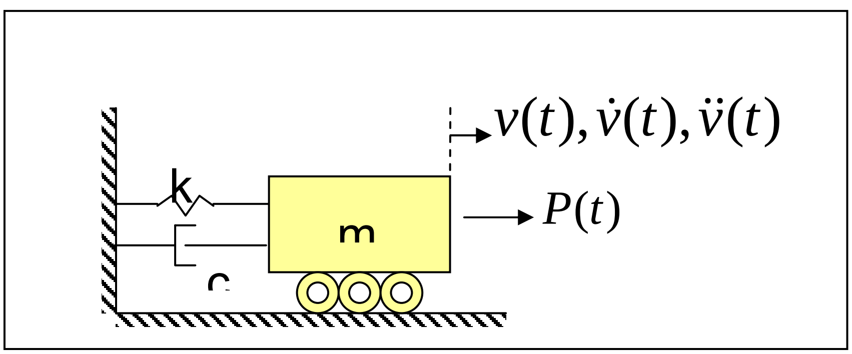
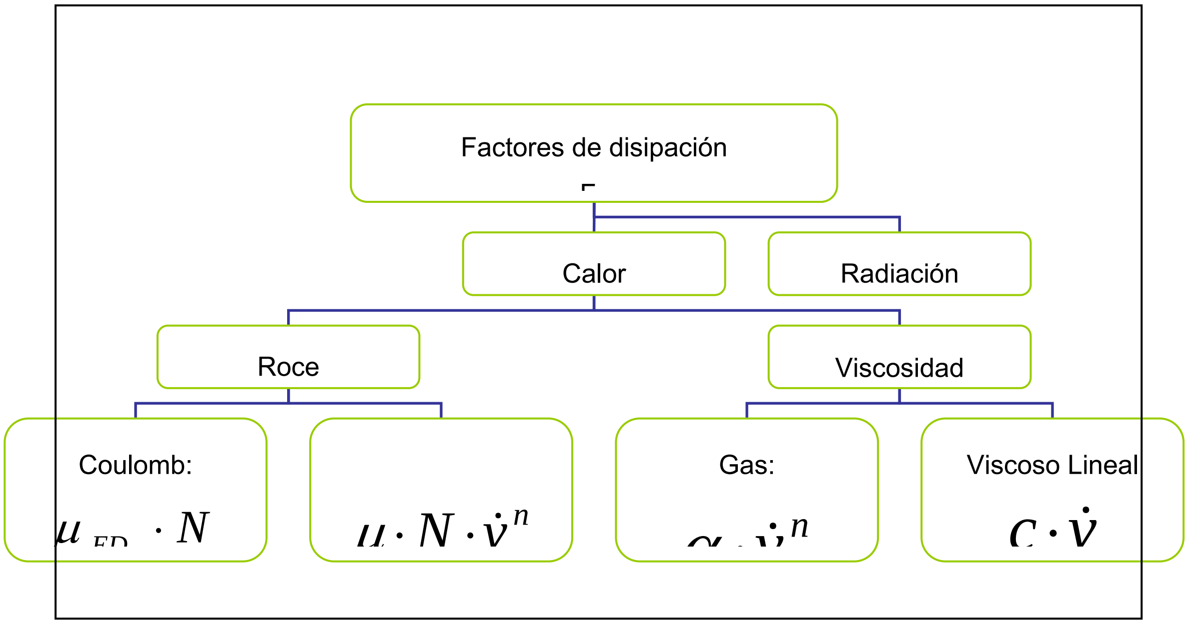


Figura 4.11: Ejemplo de sistema de 1GDL con amortiguamiento

Las fuerzas disipativas, F_D , se pueden deber a diferentes factores:



Al graficar la fuerza disipativa en función del desplazamiento del sistema se obtienen diferentes figuras:

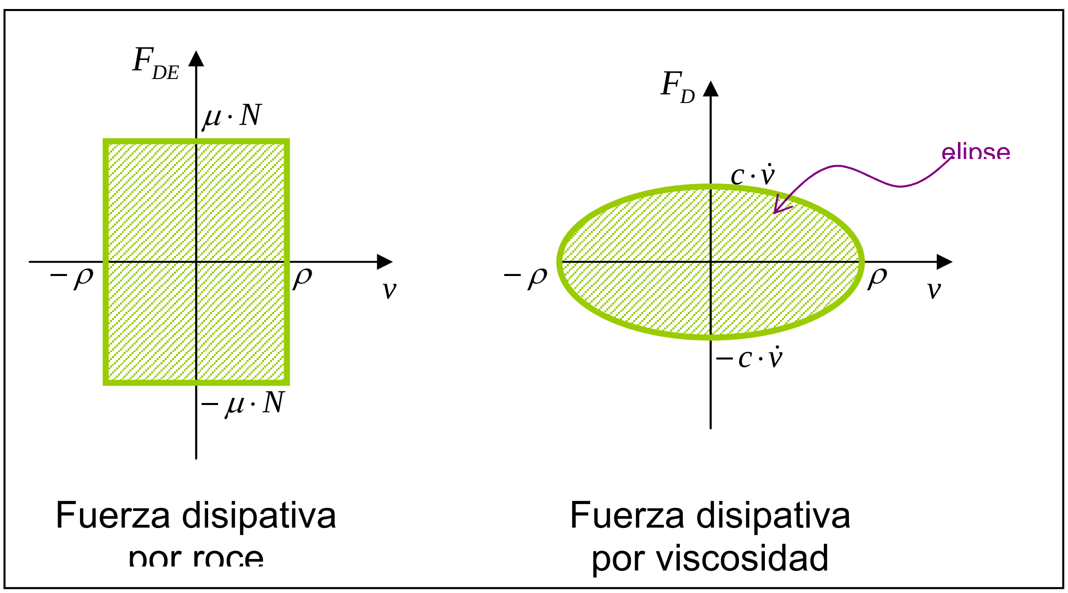
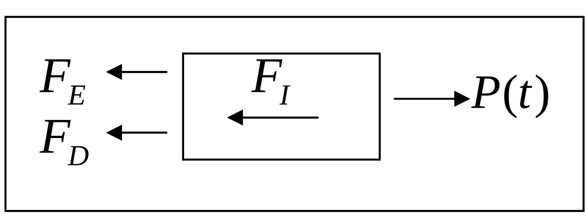


Figura 4.12: Gráficos de disipación.

Equilibrio Dinámico DCL:



De donde:

$$\sum F = 0 \Rightarrow F_I(t) + F_D(t) + F_E(t) = P(t)$$

Y como:

$F_I(t) = m\ddot{v}(t)$: Fuerza de inercia

$F_D(t) = c\dot{v}(t)$: Fuerza disipativas

$F_E(t) = kv(t)$: Fuerza elástica

$$\Rightarrow m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = P(t) \quad \text{(ecc. 2.4)}$$

Si en un sistema se consideran la fuerza elástica y la fuerza disipativas juntas, como en el sistema del ejemplo, se dice que el sistema es viscoelástico.

4.7. SOLUCIÓN HOMOGÉNEA DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Para determinar la solución homogénea se tiene:

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = 0$$

$$v(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

$$v(t) = Ge^{st}$$

$$\dot{v}(t) = Gse^{st}$$

$$\ddot{v}(t) = Gs^2e^{st}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación de movimiento (ecc. 2.4):

$$mGs^2e^{st} + cGse^{st} + kGe^{st} = 0$$

$ms^2 + cs + k = 0$: Ecuación característica (ecc. 2.5).

$$s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

$$s = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$s = \frac{-c\omega}{2m\omega} \pm \omega\sqrt{\left(\frac{c}{2m\omega}\right)^2 - 1}$$

$$\beta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega}$$

$$s = -\beta\omega \pm \omega\sqrt{\beta^2 - 1}$$

De donde las características de la vibración de un sistema están dadas por:

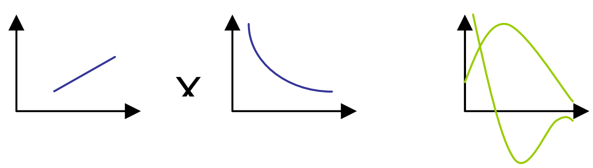
$$\boxed{\begin{array}{l} c > c_c \text{ : } Sobreamortiguamiento \\ c = c_c \text{ : } Amortiguamiento\_crítico \\ c < c_c \text{ : } Subamortiguamiento\_crítico \end{array}}$$

<u>Caso 1:</u> $c = c_{crítico} = 2\sqrt{km} = 2m\omega$

$$s = \frac{-c}{2m} = -\omega$$

Luego:

$$v(t) = G_1 e^{-\omega t} + G_2 t e^{-\omega t} \Rightarrow v(t) = \left(G_1 + G_2 t\right) e^{-\omega t}$$



Si $c \geq c_c$ ***el sistema no vibra***.

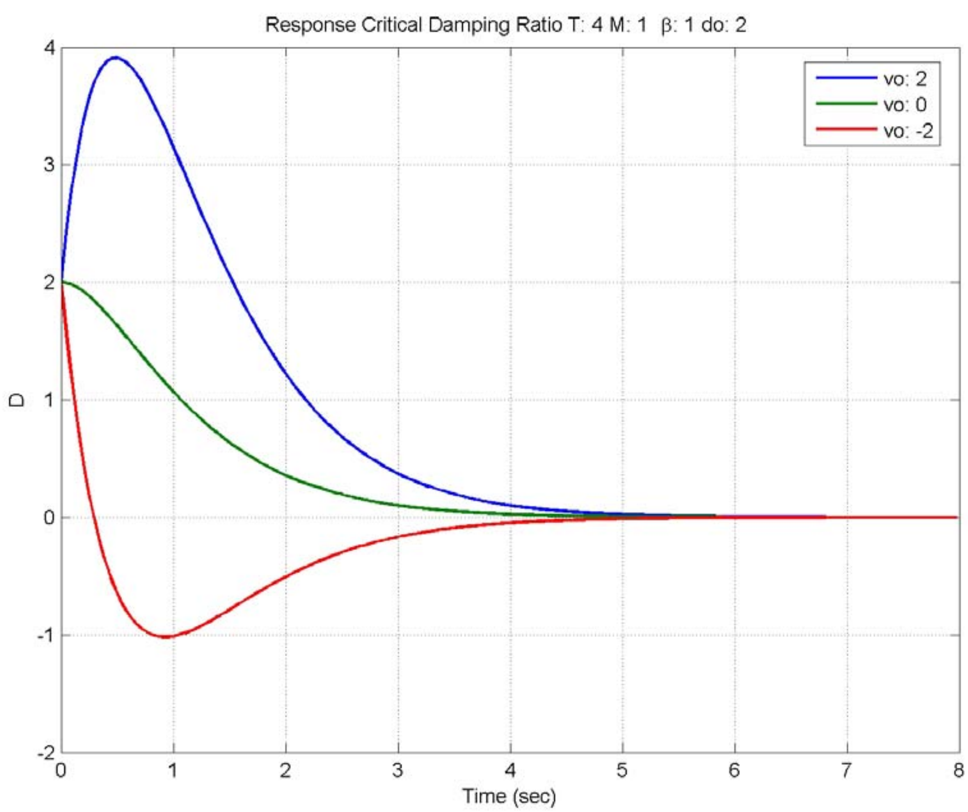


Figura 4.13 Respuesta bajo amortiguamiento crítico. Varias velocidades iniciales.

Caso Sub Amortiguado: $c < c_{crítico}$

Desarrollando la ecuación anterior:

$$s = -\beta\omega \pm \omega\sqrt{\beta^2 - 1}$$

$$s = -\beta\omega \pm i\,\underbrace{\omega\sqrt{1-\beta^2}}_{\omega_D}$$

Frecuencia angular amortiguada es $\omega_D = \omega\sqrt{1-\beta^2}$

$$\rho = -\beta\omega \pm i\omega_D$$

$$v(t) = G_1 e^{(-\beta\omega + i\omega_D)t} + G_2 e^{(-\beta\omega - i\omega_D)t}$$

$$v(t) = e^{-\beta\omega t}\left(G_1 e^{i\omega_D t} + G_2 e^{-i\omega_D t}\right)$$

Se sabe que:

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{\theta i} + e^{-\theta i}\right)$$
$$\Rightarrow$$
$$e^{-\theta i} = \cos\theta - i\sin\theta \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{\theta i} - e^{-\theta i}\right)$$

Entonces para los términos:

$$d(t) = G_1 e^{i\omega_D t} + G_2 e^{-i\omega_D t}$$

reconociendo

$$G_1 = G_{1R} + iG_{1I} \quad G_2 = G_{2R} + iG_{2I}$$

ordenado

$$d(t) = \left[\left(G_{1R} + G_{2R}\right)\cos\omega_D t - \left(G_{1I} - G_{2I}\right)sen(\omega_D t)\right] + i\left[\left(G_{1I} + G_{2I}\right)\cos\omega_D t + \left(G_{1R} - G_{2R}\right)sin\omega_D t\right]$$

pero $d(t)$ es real por tanto

$G_{1I} = -G_{2I} = G_I$ y $G_{1R} = G_{2R} = G_R$

Es decir son un par conjugado $G_1 = G_2^*$

$G_1 = G_R + iG_I$ y $G_2 = G_R - iG_I$

Entonces:

$$d(t) = G_1 e^{i\omega_D t} + G_2 e^{-i\omega_D t}$$

$$d(t) = \left(G_R + iG_I\right)e^{i\omega_D t} + \left(G_R - iG_I\right)e^{-i\omega_D t}$$

pero $\left(G_R + iG_I\right)e^{i\omega_D t} = Ge^{i(\omega_D t+\theta)}$ y $\left(G_R - iG_I\right)e^{-i\omega_D t} = Ge^{-i(\omega_D t+\theta)}$

Es decir son dos vectores de magnitud G rotando con ángulo $\alpha = \omega_D t - \theta$ pero en direcciones contrarias por tanto se cancela la parte compleja y se suman las proyecciones en el eje real:

$$d(t) = 2G\cos\left(\omega_D t + \theta\right) == Asen\omega_D t + B\cos\omega_D t$$

donde $A = 2G_R$ y $B = -2G_I$

De donde se obtiene la respuesta al caso amortiguado sin excitación externa.

$$v(t) = e^{-\beta\omega t}\left(A\sin\left(\omega_D t\right) + B\cos\left(\omega_D t\right)\right)$$

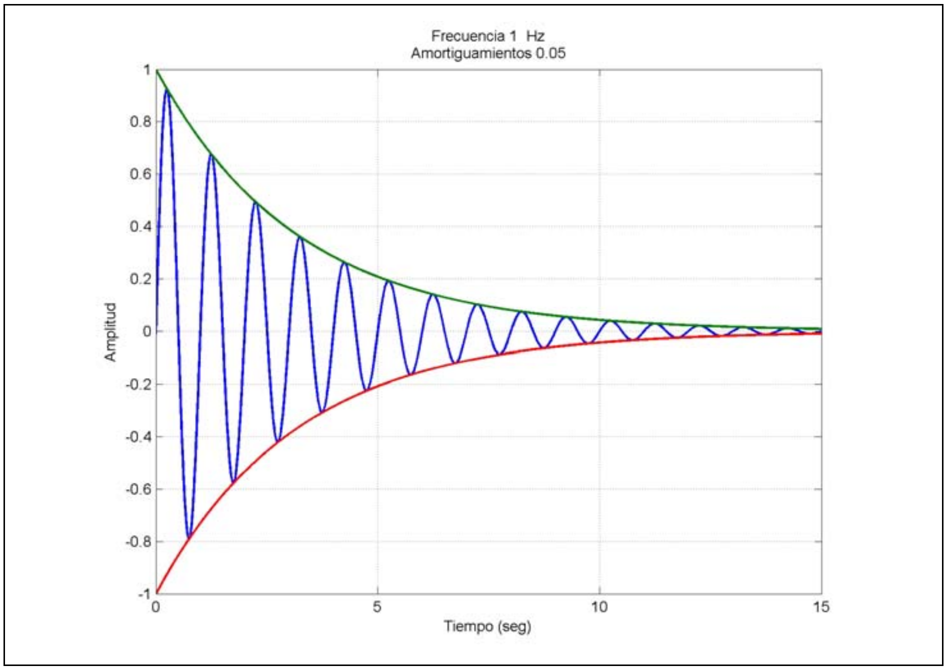
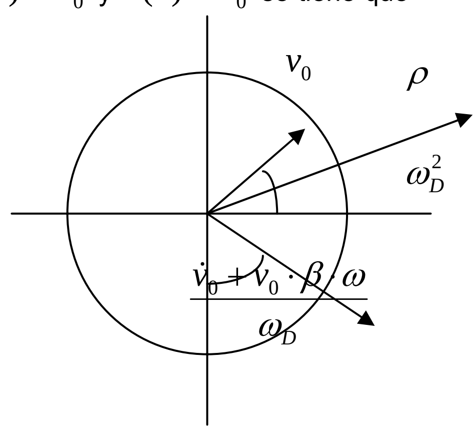


Figura 4.14

4.8. ANÁLISIS DE SISTEMAS DE OSCILACIÓN LIBRE

Para un sistema con $P(t)=0$ y con condiciones iniciales $v(0)=v_0$ y $\dot{v}(0)=\dot{v}_0$ se tiene que el desplazamiento está dado por:

$$v(t)=e^{-\beta\omega t}\left[\left(\frac{\dot{v}_0+v_0\beta\omega}{\omega_D}\right)\sin\left(\omega_D t\right)+v_0\cos\left(\omega_D t\right)\right]$$

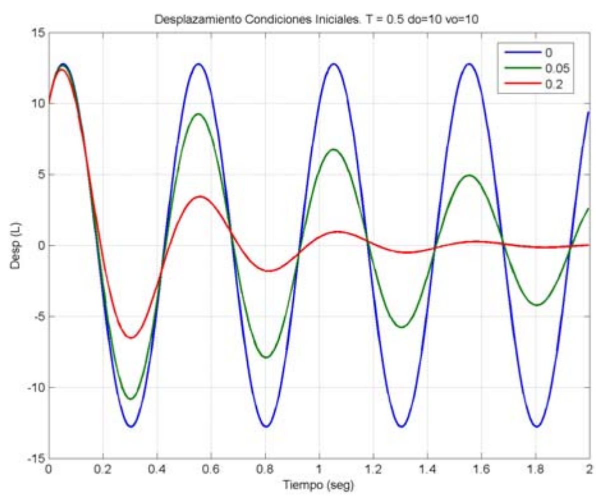


Lo que es equivalente a:

$$v(t)=\rho e^{-\beta\omega t}\cos(\omega_D t-\theta)$$

Donde: $\rho=\sqrt{\left(\frac{\dot{v}_0+\beta\omega v_0}{\omega_D}\right)^2+v_0{}^2}$

$$\theta=arctg\left(\frac{\dot{v}_0+\beta\omega v_0}{\omega_D v_0}\right)$$



ρ : Amplitud máxima.

$$Envolvente \quad e^{-\beta\cdot\omega\cdot t}$$

$$Periodo \quad T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$$

Figura 4.15

4.9. EL AMORTIGUAMIENTO

El valor de la razón de amortiguamiento varía según el tipo de material, como se ve en la siguiente lista.

Sin daño

$\rightarrow Acero / Hormigon \approx 0,01 - 0.03$

$\rightarrow Albañilería \approx 0,03 - 0,05$

En el límite de daño (fluencia)

$\rightarrow Acero / Hormigon \approx 0,03 - 0.10$

$\rightarrow Albañilería \approx 0,05 - 0,15$

Al desarrollar la ecuación que define la frecuencia angular amortiguada se tiene:

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\beta^2} \Rightarrow \left(\frac{\omega_D}{\omega}\right)^2 = 1-\beta^2$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_D^2}{\omega^2} + \beta^2 = 1$$

Algunos valores para β según esta última ecuación se muestran en la tabla 2.1.

Valores para β	
β	$\dfrac{\omega_D}{\omega}=\dfrac{T}{T_D}$
0,01	0,9999
0,05	0,9987
0,10	0,9950
0,20	0,9798
0,40	0,9165

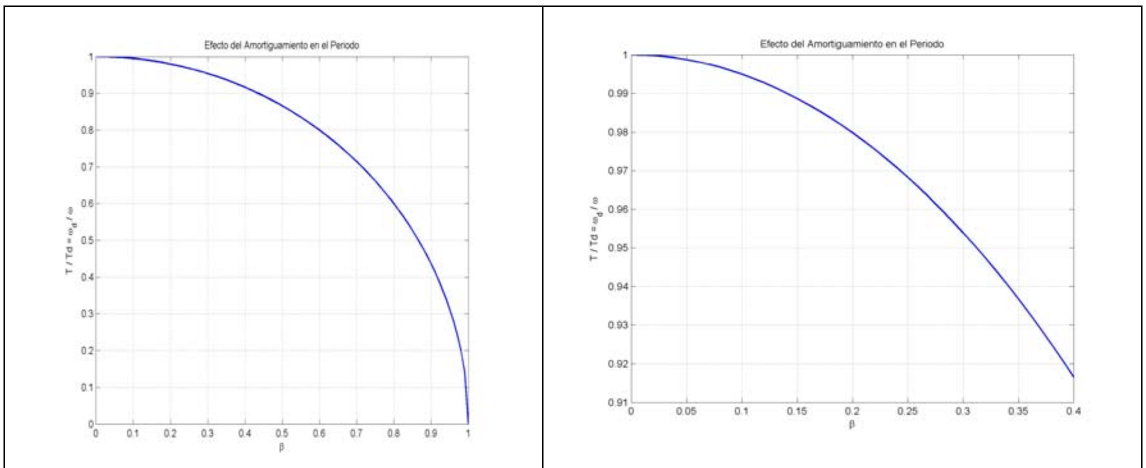


Figura 4.16 Variación de la razón de periodo amortiguado y no amortiguado en función de la razón de amortiguamiento critico.

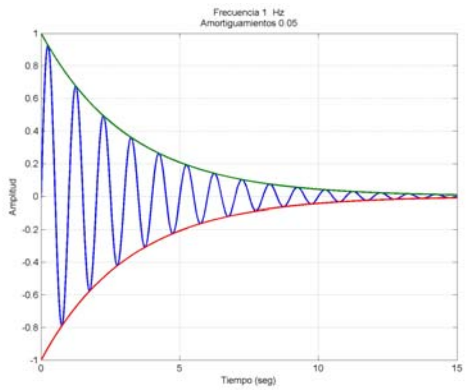
4.10. DECAIMIENTO LOGARITMICO

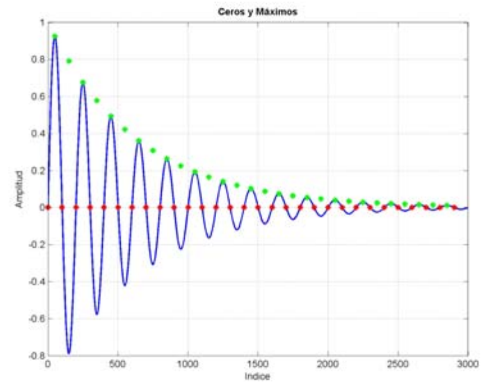
De la respuesta a condiciones iniciales se conoce la envolvente de respuesta y con ella se puede determinar la razón de amortiguamiento, β :

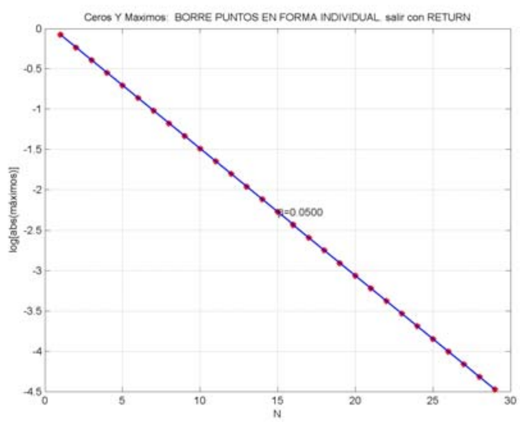
$v_i = \rho e^{-\beta\omega t_i}$ y $v_{i+m} = \rho e^{-\beta\omega t_{i+N}}$ entonces $\dfrac{v_i}{v_{i+m}} = e^{\beta\omega T_D N}$ sacando el logaritmo

$$\ln\left(\frac{v_i}{v_{i+m}}\right) = \beta\omega T_D N = \beta\omega\frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\beta^2}}N$$

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\ln\left(v_i/v_{i+N}\right)}{2\pi N}$$ aproximando $$\beta \approx \frac{\ln\left(v_i/v_{i+N}\right)}{2\pi N}$$







$$\beta = \frac{pendiente}{\pi}$$

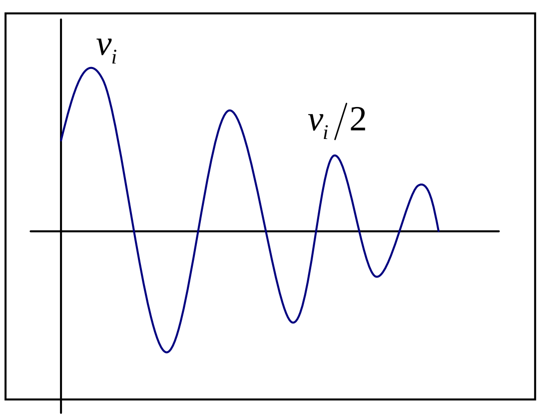
Calculo de Amortiguamiento: Deteccion de la envolvente,

II) Identificacion de cruces por cero y extremos.

III) Grafico de amplitud maxima y número del maximo

Caso Particular reducción de la mitad de la respuesta.

$$\beta = \frac{\ln\left(v_i / v_{i+N}\right)}{2\pi N}$$



$$\frac{1}{2\pi N}\ln\left(\frac{v_i}{v_i/2}\right)=\beta$$

$$N=\frac{\ln(2)}{2\pi\beta}$$

Número de Ciclos para obtener un 50% de reducción de amplitud inicial	
β	$N=\frac{\ln(2)}{2\pi\beta}$
0,01	11,03
0,05	2,2
0,10	1,1

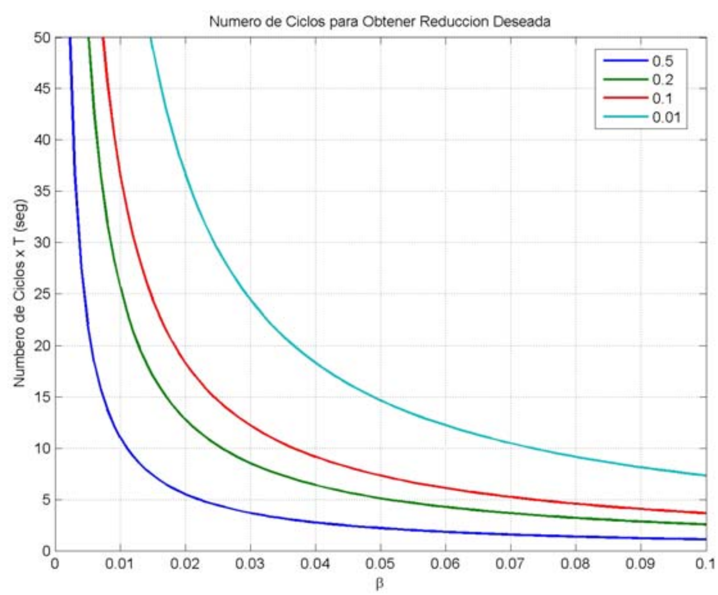


Figura 4.17 Número de Ciclos completos para alcanzar un decaimiento respecto de un valor inicial de referencia. La líneas corresponden a porcentajes de reducción de amplitud inicial.

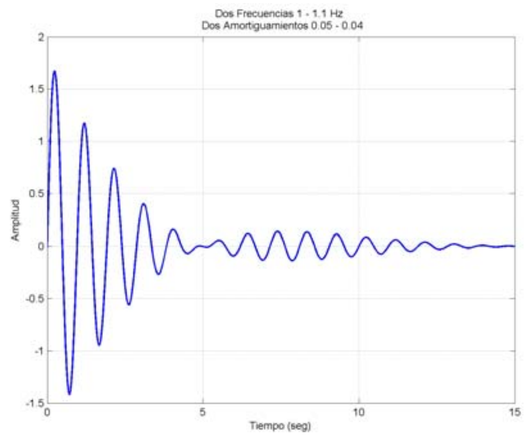


Figura 4.18 Decaimiento logarítmico de dos frecuencias cercanas. Ambas con distinto amortiguamiento.

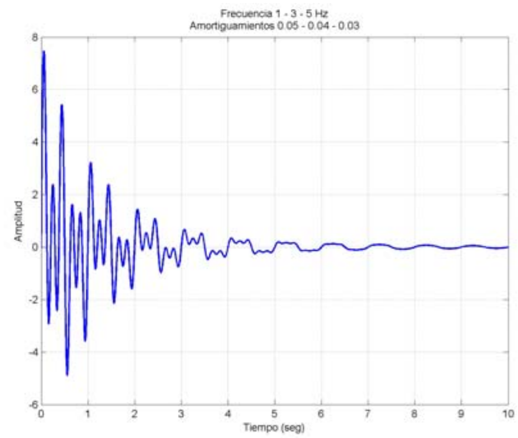


Figura 4.19 Decaimiento logarítmico de tres frecuencias cercanas. Todas con distinto amortiguamiento.

4.11. ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

La ecuación de movimiento de un sistema de 1GDL con amortiguamiento es:

$$m\ddot{v}(t)+c\dot{v}(t)+kv(t)=f(t)$$

Para la solución homogénea se tiene:

$$\begin{aligned} &m\ddot{v}_1(t)+c\dot{v}_1(t)+kv_1(t)=0 \\ &v(0)=v_0 \qquad (1) \\ &\dot{v}(0)=\dot{v}_0 \end{aligned}$$

Para la solución particular:

$$\begin{aligned} &m\ddot{v}_2(t)+c\dot{v}_2(t)+kv_2(t)=f(t) \\ &v(0)=0 \qquad (2) \\ &\dot{v}(0)=0 \end{aligned}$$

Sumando ambas soluciones:

$$(1)+(2)$$

$$\Rightarrow m\left(\ddot{v}_1(t)+\ddot{v}_2(t)\right)+c\left(\dot{v}_1(t)+\dot{v}_2(t)\right)+k\left(v_1(t)+v_2(t)\right)=0+f(t)$$

$$\begin{aligned} &v(0)=0+v_0 \\ &\dot{v}(0)=0+\dot{v}_0 \\ &v(t)=v_1(t)+v_2(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m\ddot{v}(t)+c\dot{v}(t)+kv(t)=C_i f(t)$$

$$\underline{v}(t)=C_i v(t)$$

$$\Rightarrow m\ddot{v}(t)+c\dot{v}(t)+kv(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t)$$

$$v(t)=\sum C_i v_i(t)$$

4.12. EXITACIÓN ARMONICA C=0

Ecuación de equilibrio dinámico:

$$m\ddot{v}(t)+c\dot{v}(t)+kv(t)=p(t)$$

$$p(t)=P_0\sin(\varpi t) \quad c=0$$

Resolviendo:

$$\Rightarrow m\ddot{v}(t)+kv(t)=P_0\sin(\varpi t)$$

$$\Rightarrow v_h(t)=A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow v_p(t)=G\sin(\varpi t)\Rightarrow \ddot{v}_p(t)=-G\varpi^2\sin(\varpi t)$$

Reemplazando la solución particular:

$$\Rightarrow \sin(\varpi t)\left[-G\varpi^2 m+Gk\right]=P_0\sin(\varpi t)$$

$$\Rightarrow G=\frac{P_0}{k\left[1-\dfrac{\varpi^2 m}{k}\right]}=\frac{P_0}{k\left[1-\dfrac{\varpi^2}{\omega^2}\right]}$$

Luego, el desplazamiento total está dado por:

$$v(t)=A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)+\frac{P_0}{k}\left(\frac{1}{1-\left(\dfrac{\varpi}{\omega}\right)^2}\right)\sin(\varpi t)$$

Si: $\begin{array}{l} v(0)=v_0=0 \\ \dot{v}(0)=\dot{v}_0=0 \end{array}$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{P_0}{k}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^2}\right)\left[\sin(\overline{\omega}t) - \frac{\overline{\omega}}{\omega}\sin(\omega t)\right]$$

Donde:

$\frac{P_0}{k}$: Δ estático (Δ_{est}) $\frac{1}{1-\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^2}$: Factor de amplificación dinámico (FAD).

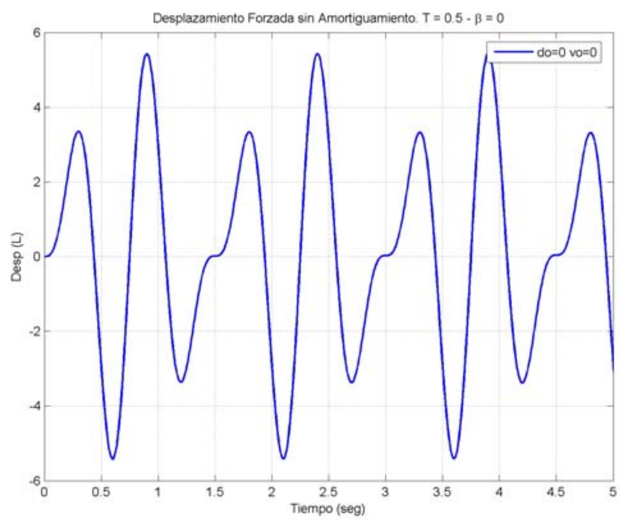


Figura 4.20 Respuesta a forzante armónica con amortiguamiento nulo. No se elimina el transiente. Es periódica.

Cuando $\frac{\overline{\omega}}{\omega} = 1$ se alcanza la resonancia del sistema, es decir, el FAD se vuelve infinito.

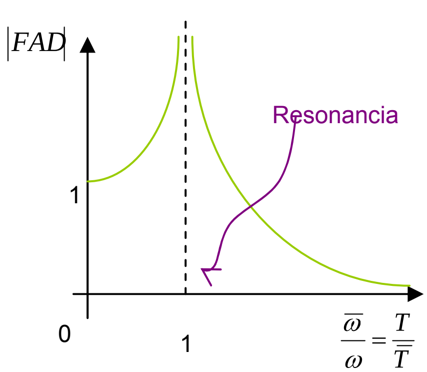


Figura 4.21

4.13. EXITACIÓN ARMONICA C ARBITRARIO

Entonces, si se tiene:

$$m\ddot{v}(t)+c\dot{v}(t)+kv(t)=\left.\begin{matrix}P_0\sin(\bar{\omega}t)\\P_0\cos(\bar{\omega}t)\end{matrix}\right\}P_0e^{i\cdot\bar{\omega}\cdot t}=P_0\cos(\bar{\omega}t)+\left(P_0\sin(\bar{\omega}t)\right)i$$

$$\Rightarrow \ddot{v}(t)+\frac{c}{m}\dot{v}(t)+\frac{k}{m}v(t)=\frac{P_0}{m}e^{i\bar{\omega}t}$$

$$\Rightarrow \ddot{v}(t)+2\beta\omega\dot{v}(t)+\omega^2v(t)=\frac{P_0}{m}e^{i\bar{\omega}t}$$

La solución particular es:

$$v_p(t)=Ge^{i\bar{\omega}t}$$

$$\Rightarrow \dot{v}_p(t)=Gi\bar{\omega}e^{i\bar{\omega}t}$$

$$\Rightarrow \ddot{v}_p(t)=-G\bar{\omega}^2e^{i\bar{\omega}t}$$

Al reemplazar en la ecuación de movimiento:

$$\Rightarrow Ge^{i\cdot\bar{\omega}\cdot t}\left[-\bar{\omega}^2+2\beta\omega\bar{\omega}i+\omega^2\right]=\frac{P_0}{m}e^{i\bar{\omega}t}$$

$$\Rightarrow G=\frac{P_0}{m\omega^2}\frac{1}{\left(1-\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2+2\beta\frac{\bar{\omega}}{\omega}i\right)}$$

Si $\gamma=\dfrac{\bar{\omega}}{\omega}$, entonces:

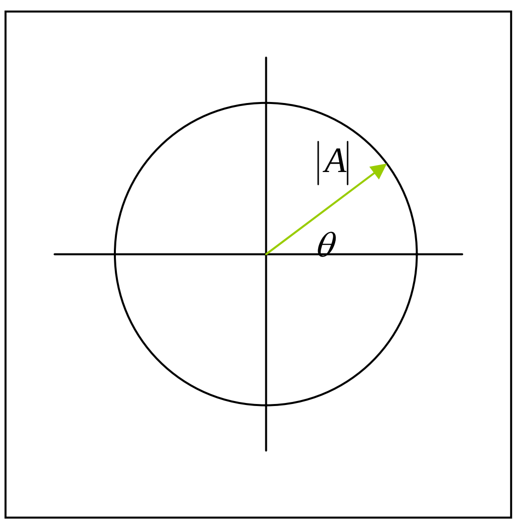
$$v_p(t)=\frac{P_0}{k}\frac{1}{\left(1-\gamma^2+2\beta\gamma i\right)}e^{i\bar{\omega}t}$$

$$\Rightarrow v_p(t)=\frac{P_0}{k}\frac{1}{|A|e^{\theta i}}e^{i\bar{\omega}t}$$

$$con:$$

$$|A|=\sqrt{\left(1-\gamma^2\right)^2+\left(2\beta\gamma\right)^2}$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{2\beta\gamma}{1-\gamma^2}\right)$$



Entonces:

$$v_p(t)=\frac{P_0}{k}De^{i(\bar{\omega}t-\theta)}$$

$$con: D=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\gamma^2\right)^2+\left(2\beta\gamma\right)^2}}$$

Con este resultado se tiene:

Si

$$p(t)=P_0\cos\left(\bar{\omega}t\right)\Rightarrow v_p(t)=\frac{P_0}{k}D\cos\left(\bar{\omega}t-\theta\right)$$

$$p(t)=P_0\sin\left(\bar{\omega}t\right)\Rightarrow v_p(t)=\frac{P_0}{k}D\sin\left(\bar{\omega}t-\theta\right)$$

En resumen:

$$m\ddot{v}\left(t\right)+c\dot{v}\left(t\right)+kv\left(t\right)=\begin{cases}P_0\sin(\bar{\omega}t-\theta)\\ P_0\cos(\bar{\omega}t-\theta)\\ P_0e^{i(\bar{\omega}t-\theta)}\end{cases}$$

El desplazamiento es:

$$v(t)=\underbrace{e^{-\omega\beta t}\left(A\sin\left(\omega_D t\right)+B\cos\left(\omega_D t\right)\right)}_{Transiente}+\underbrace{\frac{P_0}{k}D\begin{cases}\sin(\bar{\omega}t-\theta)\\ \cos(\bar{\omega}t-\theta)\\ e^{i(\bar{\omega}t-\theta)}\end{cases}}_{Permanente}$$

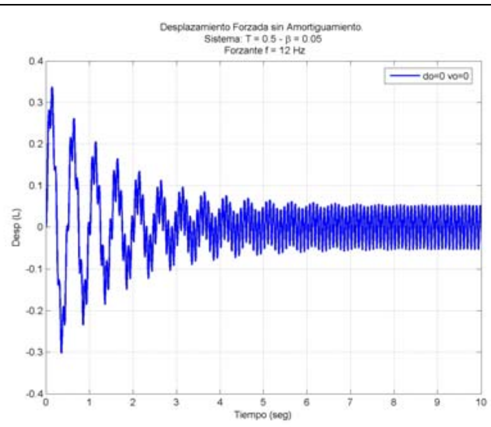


Figura 4.22 Respuesta bajo excitación armónica a partir de condiciones iniciales nulas. Notar el gran efecto inicial transiente y su decaimiento para pasar a un régimen permanente controlado por la frecuencia de excitación.

4.13.1. Factor de Amplificación Máximo

$$D = \frac{1}{\left[\left(1-\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(2\beta\frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$D = \left[\left(1-\gamma^2\right)^2 + \left(2\beta\gamma\right)^2\right]^{-1/2}$$

Derivando $\frac{dD}{d\gamma} = \frac{-1}{2}\left[\left(1-\gamma^2\right)^2 + \left(2\beta\gamma\right)^2\right]^{-3/2}\left(2\left(1-\gamma^2\right)\left(-2\gamma\right) + 2\left(2\beta\gamma\right)2\beta\right) = 0$

$= -4\gamma\left(1-\gamma^2\right) + 8\beta^2\gamma = 0$ una posible solución es $\gamma = 0$

Eliminando esta solución: $\left(\gamma^2 - 1\right) + 2\beta^2 = 0$

De donde: $\gamma = \pm\sqrt{1-2\beta^2}$

Por tanto $\frac{\overline{\omega}}{\omega} = \sqrt{1-2\beta^2}$ Máximo existe solo si $1-2\beta^2 \geq 0$ $\beta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \beta < 1/\sqrt{2}$

El valor del máximo es:

$$D_{\max} = \frac{1}{\left[\left(1-\left(1-2\beta^2\right)\right)^2 + \left(2\beta\sqrt{1-2\beta^2}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{\left[4\beta^4 + 4\beta^2\left(1-2\beta^2\right)\right]^{1/2}} = \frac{1}{\left[4\beta^2 - 4\beta^4\right]^{1/2}} = \frac{1}{2\beta\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$D_{\max} = \frac{1}{2\beta\sqrt{1-\beta^2}} \approx \frac{1}{2\beta}$$

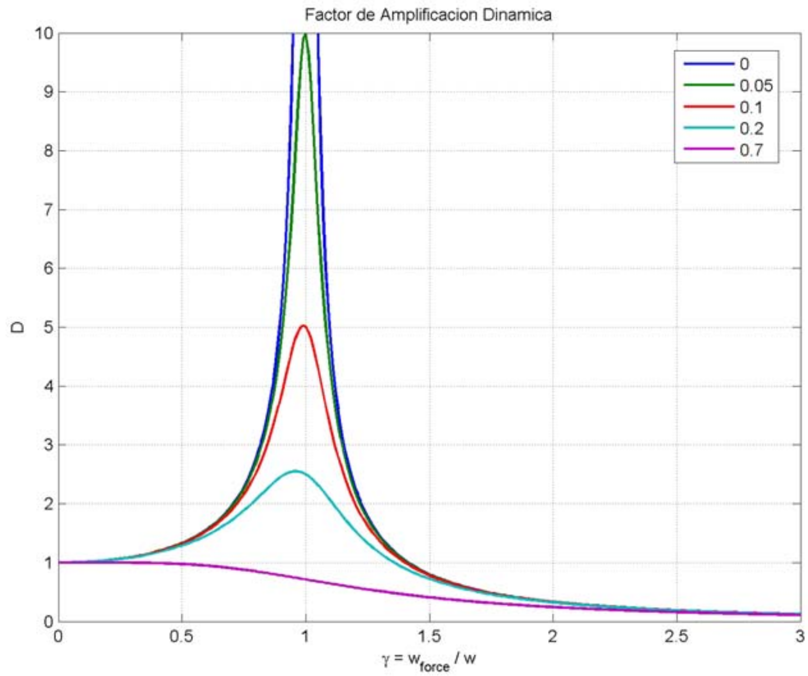
4.13.2. Análisis de la Amplificación Dinámica

Factor de amplificación dinámico de desplazamiento. Ojo que no es lo mismo para el caso de velocidad y aceleración.

$$D = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\gamma^2\right)^2 + \left(2\beta\gamma\right)^2}}$$

$$D_{\max} \Rightarrow \gamma = \sqrt{1-2\beta^2} \approx 1$$

$$\Rightarrow D_{\max} = \frac{1}{2\beta\sqrt{1-\beta^2}} \approx \frac{1}{2\beta}$$



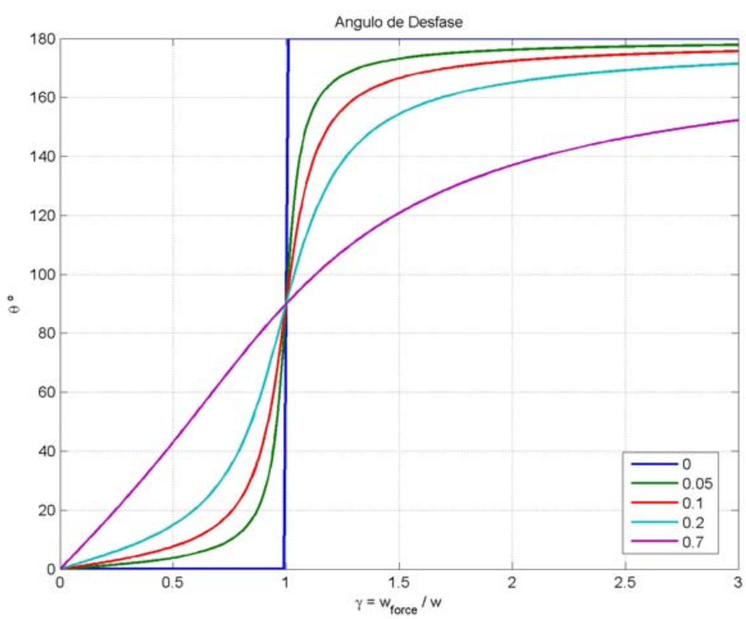


Figura 4.23 Factor de amplificación dinámica y ángulo de desfase para distinto amortiguamiento y razón de frecuencia.

4.13.3. Ancho de Banda del Factor de Amplificación

Dado el factor de amplificación:

$$D = \frac{1}{\left[\left(1-\gamma^2\right)^2 + \left(2\beta\gamma\right)^2\right]^{1/2}}$$

Y su máximo aproximado. Buscamos las frecuencias para un factor del máximo.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} D_{\max} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\beta}$$

Igualando:

$$\frac{1}{\left(1-\gamma^2\right)^2 + \left(2\beta\gamma\right)^2} = \frac{1}{\left(2\sqrt{2}\beta\right)^2} = \frac{1}{8\beta^2}$$

$$\left(1-\gamma^2\right)^2 + \left(2\beta\gamma\right)^2 = 8\beta^2$$

$$1 - 2\gamma^2 + \gamma^4 + 4\beta^2\gamma^2 = 8\beta^2$$

$$\gamma^4 + \gamma^2\left(4\beta^2 - 2\right) + \left(1 - 8\beta^2\right) = 0$$

Buscamos las raíces:

$$\gamma^2 = \frac{-4\beta^2 + 2 \pm \sqrt{\left(4\beta^2-2\right)^2 - 4\left(1-8\beta^2\right)}}{2}$$

$$= 1 - 2\beta^2 \pm \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{16\beta^4 - 16\beta^2 + 4 - 4 + 32\beta^2}}$$

$$\sqrt{16\beta^4 + 16\beta^2}$$

$$4\beta\sqrt{\beta^2 + 1}$$

$$\gamma^2 = 1 - 2\beta^2 \pm 2\beta\sqrt{1+\beta^2} \text{ si } \beta << 1$$

Eliminamos radical y:

$$\gamma_1^2 \cong 1 - 2\beta - 2\beta^2$$

$$\gamma_2^2 \cong 1 + 2\beta - 2\beta^2$$

Pero $\sqrt{1-2\beta-2\beta^2} \simeq 1-\beta-\beta^2$

β	$\sqrt{1-2\beta-2\beta^2}$	$1-\beta-\beta^2$
0.01	0.9898	0.9899
0.05	0.9460	0.9475
0.10	0.8832	0.8900

Simplificamos

$\Rightarrow \gamma_1 = 1-\beta-\beta^2$ y $\Rightarrow \gamma_2 = 1+\beta-\beta^2$

$\gamma_1-\gamma_2 = 1-\beta-\beta^2-1+\beta+\beta^2 = 2\beta$ de donde:

$\beta = \dfrac{\gamma_2-\gamma_1}{2} = \dfrac{f_2-f_1}{2f}$ y dado que es muy simétrica $f \approx \dfrac{f_1+f_2}{2}$ entonces

$\beta = \dfrac{f_2-f_1}{f_2+f_1}$ Podemos obtener la razón de amortiguamiento del ancho de banda.

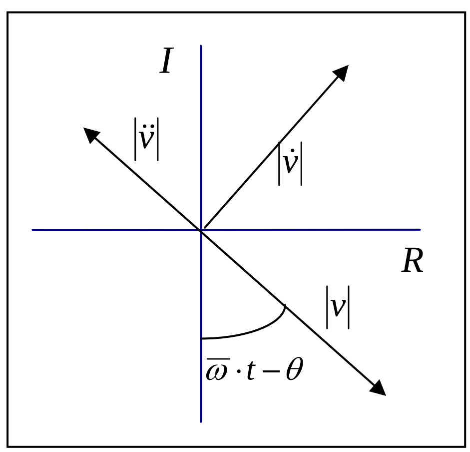
4.14. EXITACION ARMONICA REGIMEN PERMANENTE

Analizando $m\ddot{v}(t)+c\dot{v}(t)+kv(t)=p(t)$, con $p(t)=P_0\sin(\varpi t)$

$$v_p(t)=\frac{P_0}{k}D\sin(\varpi t-\theta)$$

$$\dot{v}_p(t)=\frac{P_0}{k}D\varpi\cos(\varpi t-\theta)$$

$$\ddot{v}_p(t)=-\frac{P_0}{k}D\varpi^2\sin(\varpi t-\theta)$$

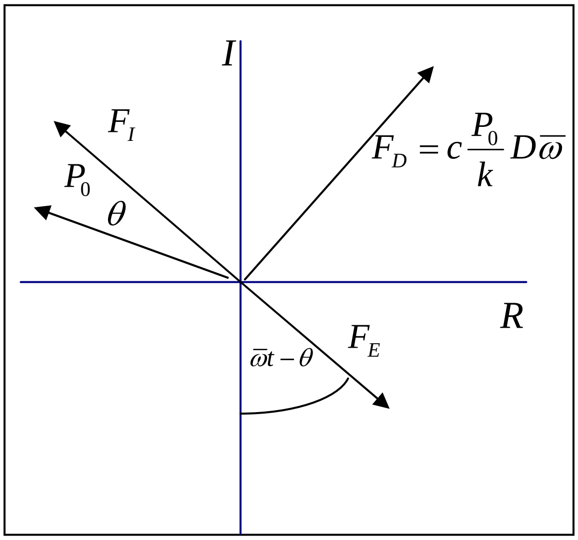


$$\Rightarrow m\ddot{v}(t)+c\dot{v}(t)+kv(t)=P_0\sin(\varpi t)$$

$$\Rightarrow F_I(t)+F_D(t)+F_E(t)=p(t)$$

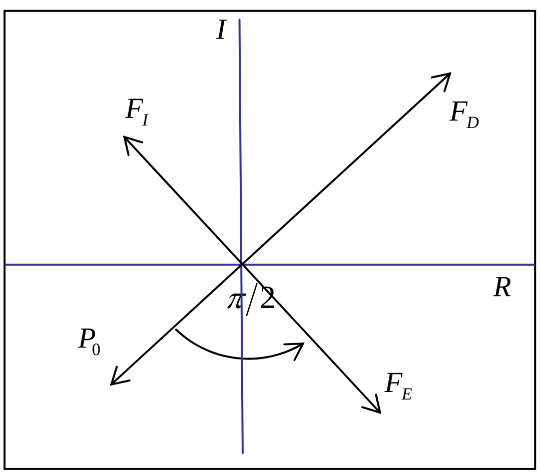
$$\Rightarrow F_I(t)+F_D(t)+F_E(t)-p(t)=0$$

Todos los vectores giran con velocidad $\overline{\omega} \cdot t$



Analizando según el valor de θ, se tienen los siguientes casos:

1) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$:



Como $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{2\beta\gamma}{1-\gamma^2}\right) \Rightarrow \gamma = 1 \Rightarrow$ Se produce resonancia.

4.14.1. Casos Básicos sensores

El sensor se puede representar como un sistema de un grado de libertad amortiguado. Analizaremos el caso de que este sensor esta adosado a una superficie que vibra bajo excitación armónica.

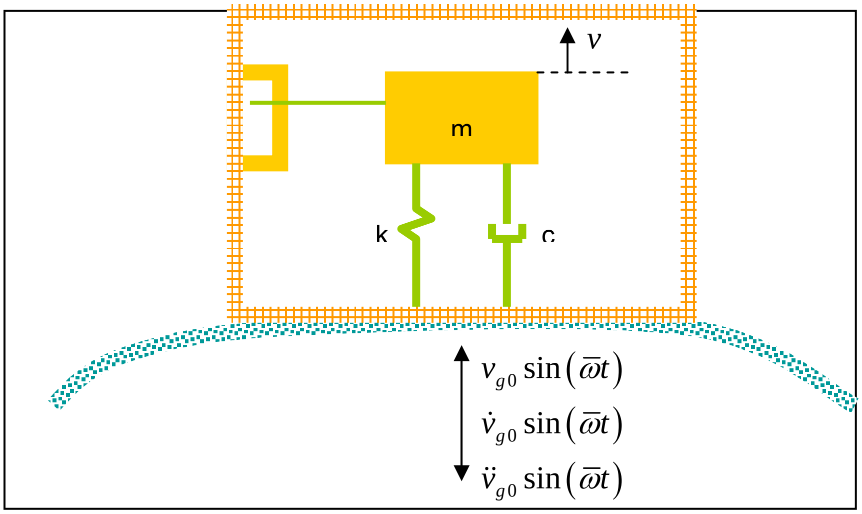


Figura 4.24 Esquema simplificado de un sensor mecánico.

En el sistema mostrado en la figura la estructura tiene una ecuación de movimiento del tipo:

$$m\ddot{v}(t)+c\dot{v}(t)+kv(t)=p_0\sin(\varpi t)$$

Analizamos preliminarmente el caso de respuesta permanente. Luego se generaliza para condición transientes y permanente y carga arbitraria. La solución permanente es:

$$\Rightarrow v_P(t)=\frac{P_0}{k}D\sin(\varpi t-\theta)$$

4.14.2. Sensor de Aceleración: Acelerómetro.

Si se tiene una aceleración aplicada a la estructura del tipo $\ddot{v}_g(t)=\ddot{v}_{go}\sin(\varpi t)$:

$$m\ddot{v}^T(t)+c\dot{v}(t)+kv(t)=0$$

$$m\left(\ddot{v}(t)+\ddot{v}_g(t)\right)+c\dot{v}(t)+kv(t)=0$$

$$m\left(\ddot{v}(t)+\ddot{v}_{go}\sin(\varpi t)\right)+c\dot{v}(t)+kv(t)=0$$

$$m\ddot{v}(t)+c\dot{v}(t)+kv(t)=-m\ddot{v}_{go}\sin(\varpi t)$$

$$v(t)=\frac{-m\ddot{v}_{go}}{k}D\sin(\varpi t-\theta)=-\ddot{v}_{go}\frac{D}{\omega^2}\sin(\varpi t-\theta)$$

Requerimos que la observación sea proporcional a la aceleración. En el caso básico que la amplitud máxima de respuesta de desplazamiento sea proporcional a la aceleración.

$$\Rightarrow |v(t)|\propto\ddot{v}_{g0}$$

Esto es la base de un acelerómetro.

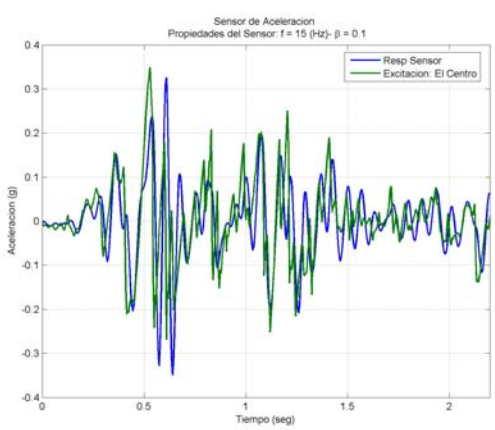
Para que funcione, requerimos que la dependencia del Factor de Amplificación Dinámica (D) sea minima o inexistente. Esto ocurre bajo dos condiciones:

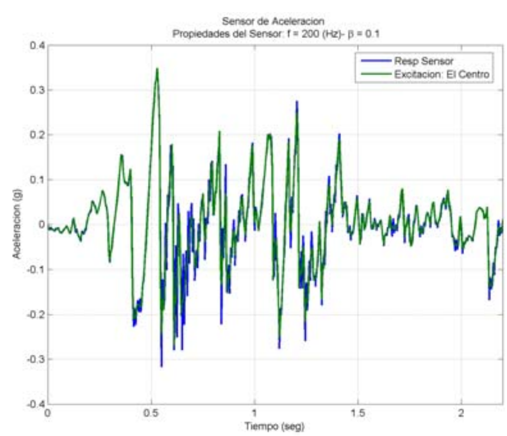
a) Sistema con amortiguamiento arbitrario y $\gamma < 0.2$ o,

b) O sistemas con razón de amortiguamiento $\beta = 0{,}6 - 0{,}7$.

En ambos casos y ω debe ser muy grande, es decir ($k >> m$). Esto es difícil de realizar y finalmente se requiere un lector muy sensible.

En la Figura 4.25 se observa el efecto de la frecuencia y el amortiguamiento del sensor en la reproducción fiel de la aceleración. En estas figuras se grafica el desplazamiento de la masa del sensor contra la aceleración de excitación. Para el caso de amortiguamiento 0.7 y frecuencias altas se obtiene una reproducción casi perfecta. Esto son los valores que utilizan acelerómetros comerciales orientados a ingeniería sísmica.





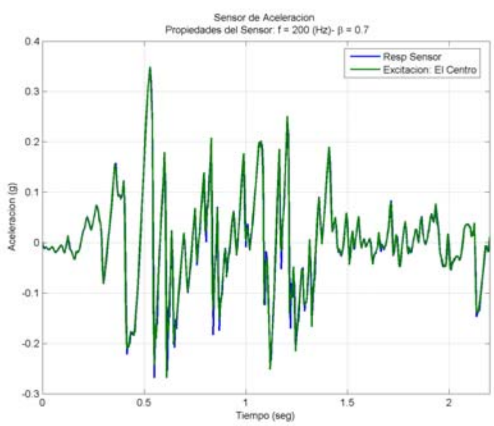


Figura 4.25 Respuesta de sensor de aceleración bajo excitación arbitraria de aceleración. Notar el ajuste de amplitud y fase. Las diferencias están asociadas a la banda de frecuencias y amortiguamiento del sensor.

4.14.3. Sensor de Desplazamiento Inercial

Cuando deseamos medir el desplazamiento del terreno se tiene la misma estructura anterior:

$$m\ddot{v}(t)+c\dot{v}(t)+kv(t)=p_0\sin(\bar{\omega}t)$$

$$\Rightarrow v_P(t)=\frac{P_0}{k}D\sin(\bar{\omega}t-\theta)$$

En este caso se tiene el desplazamiento de la carcasa como incógnita y se deriva dos veces para obtener su aceleración en función de la amplitud de desplazamiento de la carcasa:

$$v_g(t)=v_{go}\sin(\bar{\omega}t)$$

$$\Rightarrow \ddot{v}_g(t)=-v_{go}\bar{\omega}^2\sin(\bar{\omega}t)$$

La aceleración total sobre la masa del sensor y la respuesta es:

$$\Rightarrow v(t)=-\frac{m\left(-v_{g0}\bar{\omega}^2\right)}{k}D\sin(\bar{\omega}t-\theta)$$

$$\Rightarrow v(t)=v_{g0}\gamma^2 D\sin(\bar{\omega}-\theta)$$

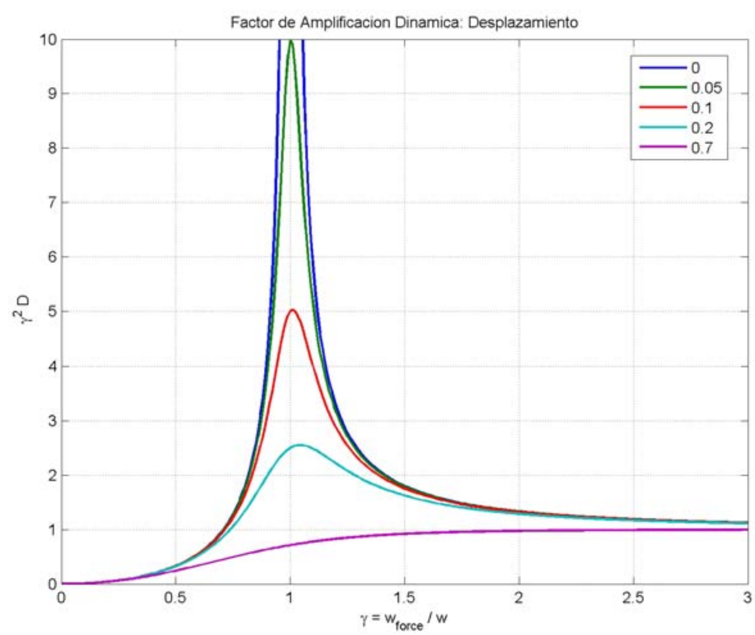


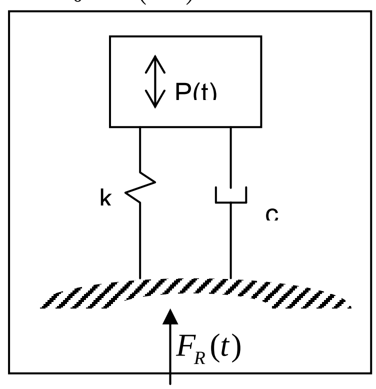
Figura 4.26 Factor de amplificación dinámica de modificado por la razón cuadrática de frecuencias de excitación y natural de un sistema de un grado de libertad.

Para que el resultado obtenido sea independiente de la relación $\gamma^2 \cdot D$, la masa debe ser mucho mayor que la rigidez ($m >> k$) y $\gamma > 1.5$ para $\beta = 0,6 - 0,7$.

Un resultado similar se utiliza en medidores de velocidad inerciales, sismómetros o geófonos.

4.15. AISLAMIENTO DE VIBRACIONES

Si se tiene la estructura mostrada en la figura, con $P(t) = P_0 \sin\left(\bar{\omega} t\right)$, la solución particular está dada por:



$$v_P(t) = \frac{P_0}{k} D \sin\left(\bar{\omega} t - \theta\right)$$

Entonces, las fuerzas son:

$$F_E(t) = k v_p(t) = P_0 D \sin\left(\bar{\omega} t - \theta\right)$$

$$F_D(t) = c \frac{P_0}{k} D \bar{\omega} \cos\left(\bar{\omega} t - \theta\right) = P_0 D \frac{\bar{\omega}}{\omega} \cos\left(\bar{\omega} t - \theta\right)$$

Como F_E y F_D están a 90 grados la fuerza resultante, F_R , es:

$$\Rightarrow \left|F_R\right| = \sqrt{\left|F_D\right|^2 + \left|F_E\right|^2} = P_o D \left[1 + \left(2\beta \frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2\right]^{1/2} = P_o \left[\frac{1 + \left(2\beta \frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2\right) + \left(2\beta \frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2}\right]^{1/2}$$

La Transmisibilidad de fuerzas es:

$$TR = \frac{\left|F_R\right|}{\left|P_o\right|} \left[\frac{1 + \left(2\beta \frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2\right) + \left(2\beta \frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2}\right]^{1/2}$$

Se puede demostrar que la TR es idéntica para razones de aceleración y desplazamiento absolutos.

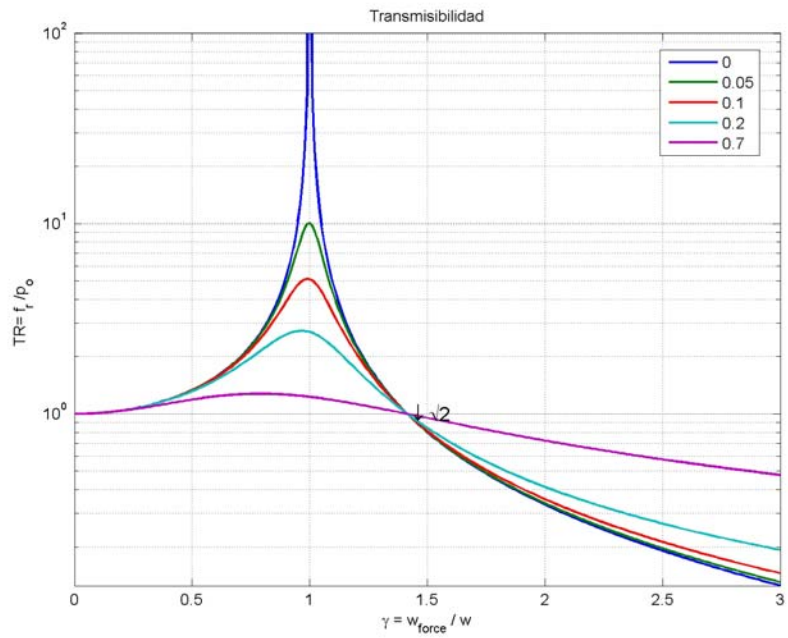


Figura 4.27

4.16. RESPUESTA EN RESONANCIA

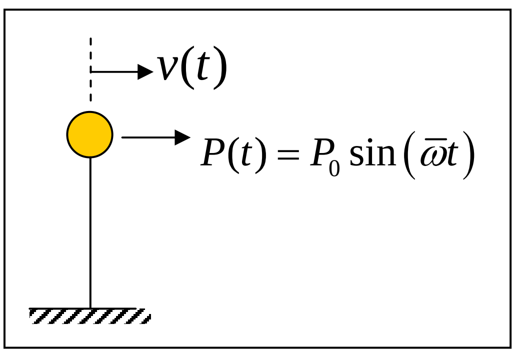


Figura 4.28

Dado:

$$v(t) = e^{-\beta\omega t}\left(A\sin(\omega_D t) + B\cos(\omega_D t)\right) + \frac{P_0}{k} D\sin(\bar{\omega} t - \theta)$$

En resonancia $\overline{\omega} = \omega \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

y $D = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\gamma^2\right)^2 + \left(2\beta\gamma\right)^2}} = \frac{1}{2\beta}$

Si las condiciones iniciales son nulas:

$$v(0) = v_0 = 0$$
$$\dot{v}(0) = \dot{v}_0 = 0$$

Entonces:

$A = \frac{P_0}{k}\frac{1}{2\sqrt{1-\beta^2}}$ $\quad B = \frac{P_0}{k}\frac{1}{2\beta}$ de donde

$$v(t) = \frac{1}{2\beta}\underbrace{\frac{P_0}{k}}_{v_{est}}\left\{e^{-\beta\cdot\omega\cdot t}\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\sin\left(\omega_D t\right) + \cos\left(\omega_D t\right)\right) - \cos\left(\overline{\omega} t\right)\right\}$$

Si: $\begin{matrix} \beta << 1 \\ \omega = \omega_d = \overline{\omega} \end{matrix}$

Luego: $\frac{v(t)}{v_{est}} = \frac{1}{2\beta}\left(e^{-\beta\omega t} - 1\right)\cos(\omega t)$

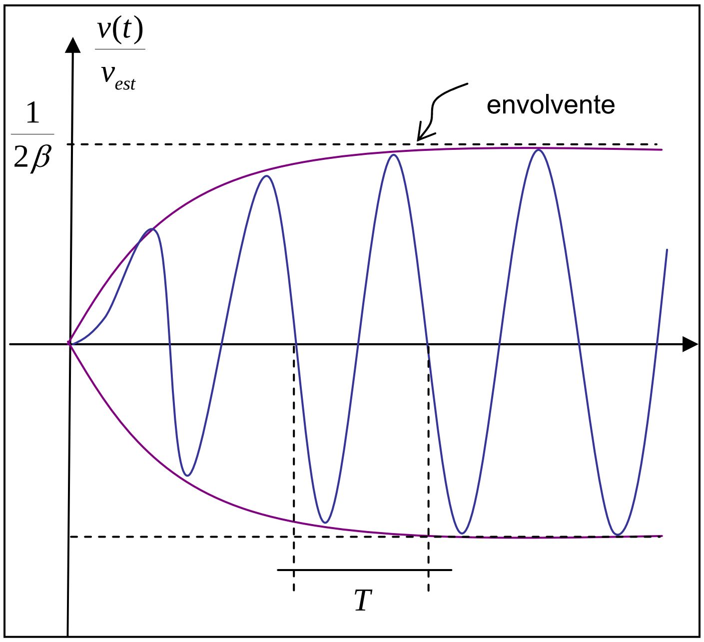
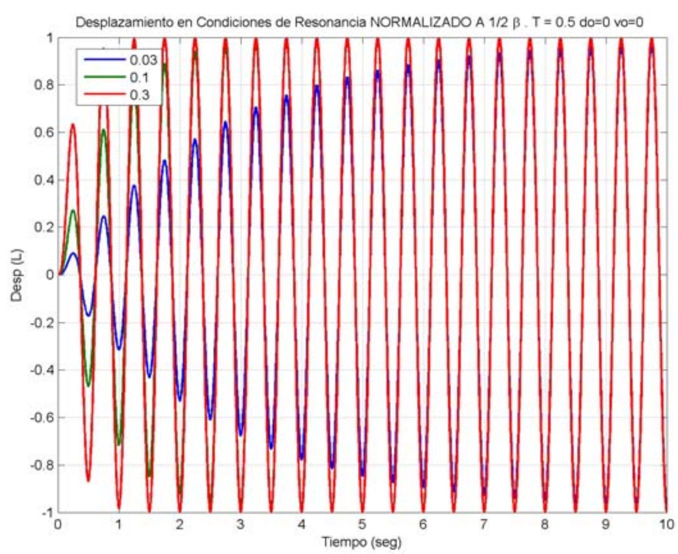


Figura 4.29

Entonces la envolvente de la función está dada por $\left|1-e^{-\beta\cdot\omega\cdot t}\right|$



Si se analiza la envolvente es posible estimar la taza de crecimiento para un tiempo dado $t = nT$ la amplitud es $A = e^{-\beta\omega t} = e^{-\beta\frac{2\pi}{T}t} = e^{-2\pi\beta n}$.

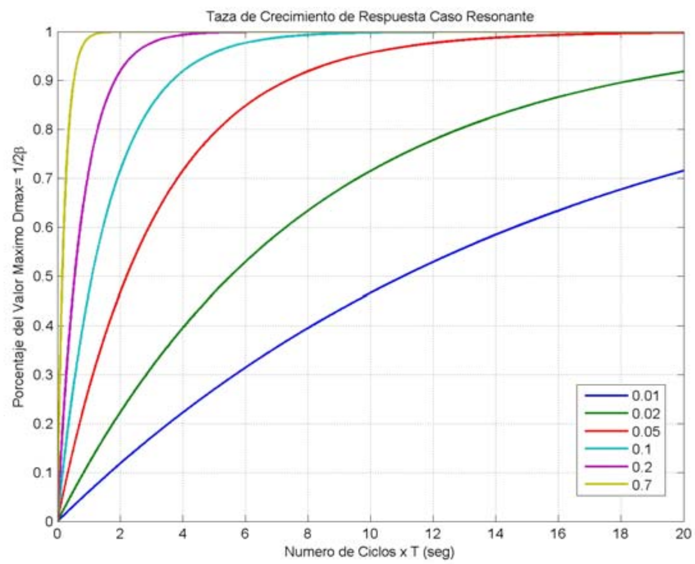


Figura 4.30 Taza de crecimiento de la respuesta resonante. A menor amortiguamiento mas tiempo para alcanzar respuesta máxima.

Si una estructura no tiene amortiguamiento, $\beta = 0$ utilizando la regla de L'Hospital's:

$$\frac{v(t)}{v_{est}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{P_0}{k}\left\{e^{-\beta\cdot\omega\cdot t}\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\sin\left(\omega_D t\right)+\cos\left(\omega_D t\right)\right)-\cos\left(\bar{\omega}t\right)\right\}}{\beta}$$

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{v(t)}{v_{est}} = \frac{\frac{1}{2}\left\{-\left[e^{-\beta\cdot\omega\cdot t}\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\sin\left(\omega_D t\right)+\cos\left(\omega_D t\right)\right)-\cos\left(\bar{\omega}t\right)\right]\omega t+\ldots\right.}{1}$$

$$\left.+\ldots.e^{-\beta\cdot\omega\cdot t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\sin\left(\omega_D t\right)+\frac{1}{2}\beta\left(1-\beta^2\right)^{-3/2}\sin\left(\omega_D t\right)\right)\right\}$$

Al evaluar $\beta = 0$ encontramos el limite

$$\frac{v(t)}{v_{est}} = \frac{1}{2}\left(\sin(\omega t) - \omega t\cos(\omega t)\right)$$

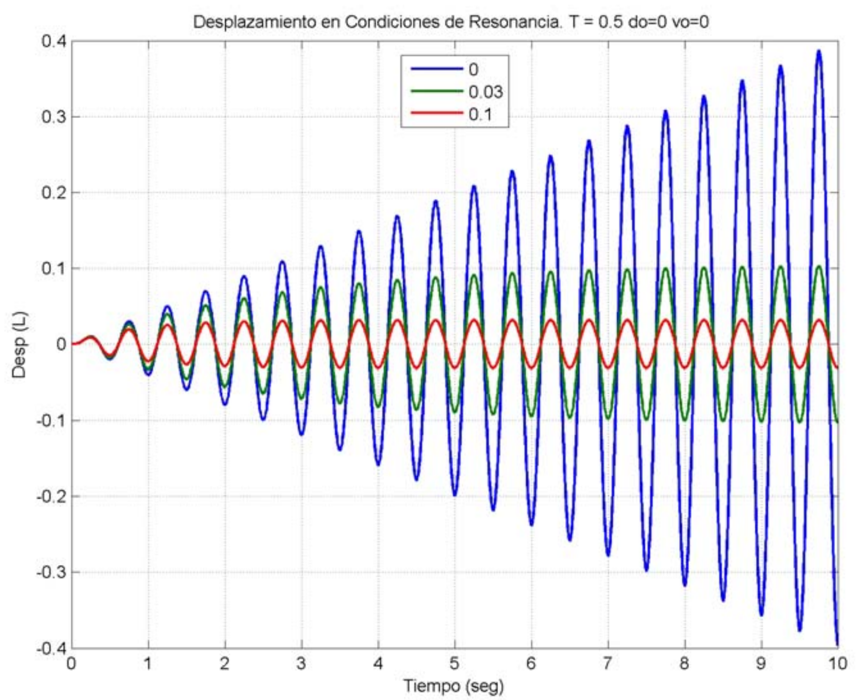


Figura 4.31

4.17. ENERGÍA DISIPADA

Para calcular la energía disipada en un sistema se integra la ecuación de movimiento del sistema en función del desplazamiento entre dos instantes de tiempo dados, de la siguiente manera:

$$\int_{v(t_1)}^{v(t_2)} \left(F_I(t) + F_D(t) + F_E(t)\right) dv = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} m\dot{v}(t)^2\Big|_{t_1}^{t_2}}_{\Delta E_K} + \underbrace{\frac{1}{2} k\, v(t)^2\Big|_{t_1}^{t_2}}_{\Delta E_V} + \int_{v(t_1)}^{v(t_2)} F_D(t)dv = 0$$

Desarrollando la última integral se tiene:

$$\int_{v(t_1)}^{v(t_2)} F_D(t)dv = \int c\dot{v}\frac{dv}{dt}dt = \int c\dot{v}^2 dt$$

Finalmente se tiene que:

$$\Delta E_K + \Delta E_V = \underbrace{-\int_{t_1}^{t_2} c\dot{v}^2(t)\,dt}_{Energía\_disipada}$$

En resonancia se tiene que $\omega = \overline{\omega}$, entonces $P(t) = F_D(t)$.

Si $P(t) = P_0 \sin(\overline{\omega}t)$, entonces:

$$v(t) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{2\beta}\sin(\overline{\omega}t - \theta)$$

pero como se está en resonancia: $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{2\beta}\cos(\overline{\omega}t)$$

Luego:

$$(P_0 \sin(\overline{\omega}t))^2 + \left(\frac{P_0}{k}\frac{1}{2\beta}\cos(\overline{\omega}t)\right)^2 = r(t)^2$$

Entonces, la energía disipada corresponde al área de la elipse que se forma al graficar $F_D(t)$ en función de $v(t)$, como se muestra en la figura 2.32.

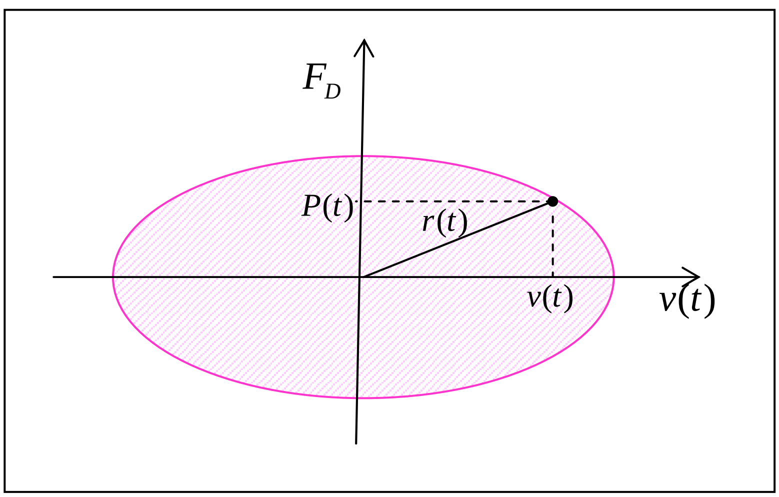


Figura 4.32

Entonces:

$$\left.\begin{aligned} &A_{elipse} = \pi ab = W_D \\ &|P(t)| = P_0 \\ &|F_D| = c\dot{v}_{\max} = c\omega\rho \\ &W_D = \pi P_0 \underbrace{\frac{P_0}{k}\frac{1}{2\beta}}_{\rho} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_{elipse} = c\omega\rho^2\pi$$

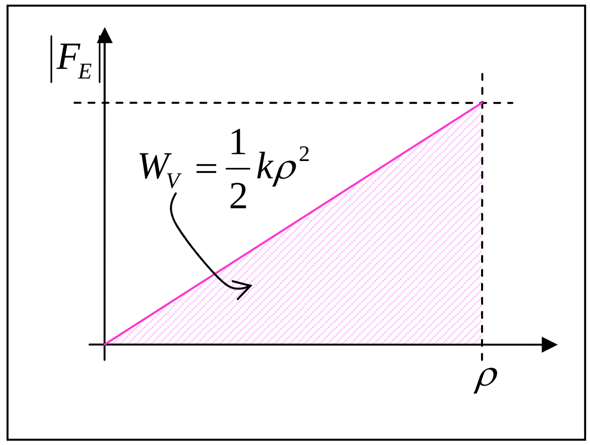


Figura 4.33

$$\Rightarrow c = \frac{W_D}{\pi\omega\rho^2}$$

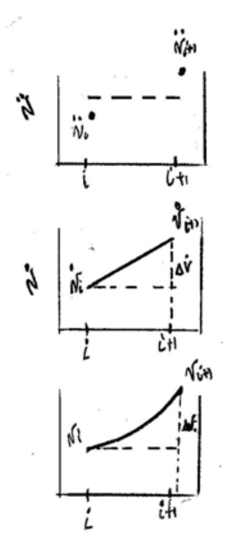
Como $\beta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega}$ se tiene:

$$\frac{c}{c_c} = \beta = \frac{W_D}{2\pi m\omega^2\rho^2} = \frac{W_D}{2\pi k\rho^2}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{W_D}{4\pi W_V}$$

5. SOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION DE 1 GDL

5.1. MÉTODO DE ACELERACIÓN PROMEDIO



$$\ddot{v}_{ave} = \frac{\ddot{v}_{n+1} + \ddot{v}_n}{2} \qquad (1)$$

Si llamamos $\ddot{v}_{n+1} - \ddot{v}_n = \Delta\ddot{v}_n$

Entonces $\ddot{v}_{ave} = \ddot{v}_n + \frac{\Delta\ddot{v}_n}{2}$ (2)

La velocidad se obtiene integrando

$$\dot{v}_{n+1} = \dot{v}_n + \Delta\dot{v}_n \qquad (3)$$

El incremento de velocidad $\Delta\dot{v}_n$ esta dado por

$\Delta\dot{v}_n = \ddot{v}_{ave}\Delta t$ y utilizando (2)

$$\Delta\dot{v}_n = \ddot{v}_n\Delta t + \frac{\Delta\ddot{v}_n}{2}\Delta t \tag{4}$$

El desplazamiento se obtiene integrando nuevamente

$$v_{n+1} = v_n + \Delta v_n \tag{5}$$

El cambio de desplazamiento en el paso es:

$$\Delta v_n = \frac{\dot{v}_{n+1} + \dot{v}_n}{2}\Delta t \tag{6}$$

Reemplazando (3) en (6)

$$\Delta v_n = \frac{\left(\dot{v}_n + \Delta\dot{v}_n + \dot{v}_n\right)}{2}\Delta t = \dot{v}_n\Delta t + \frac{1}{2}\Delta\dot{v}_n\Delta t \tag{7}$$

Usando (4)

$$\Delta v_n = \dot{v}_n\Delta t + \frac{1}{2}\left(\ddot{v}_n\Delta t^2\right) + \frac{1}{4}\Delta\ddot{v}_n\Delta t^2 \tag{8}$$

Para obtener $\ddot{v}_{n+1}$ en términos de $v_n, \dot{v}_n, \ddot{v}_n$ despejamos $\Delta\ddot{v}_n$ de (8)

$$\Delta\ddot{v}_n = \frac{4}{\Delta t^2}\left(\Delta v_n - \dot{v}_n\Delta t - \frac{1}{2}\left(\ddot{v}_n\Delta t^2\right)\right)$$

$$\Delta\ddot{v}_n = \frac{4}{\Delta t^2}\Delta v_n - \frac{4}{\Delta t}\dot{v}_n - 2\ddot{v}_n \tag{9}$$

Dado que $\ddot{v}_{n+1} = \ddot{v}_n + \Delta\ddot{v}_n$

Entonces $\ddot{v}_{n+1} = \frac{4}{\Delta t^2}\underbrace{\Delta v_n}_{\left(v_{n+1}-v_n\right)} - \frac{4}{\Delta t}v_n - \ddot{v}_n \Rightarrow \ddot{v}_{n+1} = f\left(v_{n+1}, v_n, \ddot{v}_n\right)$ (10)

Reemplazando (9) en (4) $\Delta\dot{v}_n = \ddot{v}_n\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{4}{\Delta t^2}\Delta v_n - \frac{4\dot{v}_n}{\Delta t} - 2\ddot{v}_n\right)$

Reduciendo: $\Delta\dot{v}_n = \frac{2}{\Delta t}\Delta v_n - 2\dot{v}_n$

Entonces

$$\dot{v}_{n+1} = \dot{v}_n + \Delta v_n\frac{2}{\Delta t} - 2\dot{v}_n = \frac{2}{\Delta t}\overbrace{\Delta v_n}^{v_{n+1}-v_n} - \dot{v}_n \tag{11}$$

$$\dot{v}_{n+1} = f\left(v_{n+1}, v_n, v_n\right)$$

Sustituyendo (5), (10) y (11) en

$$m\ddot{v}_{n+1} + c\dot{v}_{n+1} + kv_{n+1} = P_{n+1}$$

$$m\left(\frac{4}{\Delta t^2}\Delta v_n - \frac{4}{\Delta t}v_n - \ddot{v}_n\right) + c\left(\frac{2}{\Delta t}\Delta v_n - \dot{v}_n\right) + kv_{n+1} = P_{n+1}$$

$$\left(\frac{4}{\Delta t^2}m + \frac{2}{\Delta t}c + k\right)v_{n+1} = P_{n+1} + m\left(\frac{4}{\Delta t^2}v_n + \frac{4}{\Delta t}\dot{v}_n + \ddot{v}_n\right) + c\left(\frac{2}{\Delta t}v_n + \dot{v}_n\right)$$

Si

$\tilde{K} = \frac{4}{\Delta t^2}m + \frac{2}{\Delta t}c + k$ constante para todo el proceso, y

$$\tilde{P}_{n+1} = P_{n+1} + m\left(\frac{4}{\Delta t^2}v_n + \frac{4}{\Delta t}\dot{v}_n + \ddot{v}_n\right) + c\left(\frac{2}{\Delta t}v_n + \dot{v}_n\right)$$

Entonces:

$$v_{n+1} = \tilde{K}^{-1}\tilde{P}_{n+1}$$

Finalmente el algoritmo a utilizar es:

Inicialización:

$$\tilde{K} = \frac{4}{\Delta t^2}m + \frac{2}{\Delta t}c + k$$

$$\ddot{v}_0 = m^{-1}\left(-c\dot{v}_0 - kv_0\right)$$

For n=0:length(P)

a. $\tilde{P}_{n+1} = P_{n+1} + m\left(\frac{4}{\Delta t^2}v_n + \frac{4}{\Delta t}\dot{v}_n + \ddot{v}_n\right) + c\left(\frac{2}{\Delta t}v_n + \dot{v}_n\right)$

b. $v_{n+1} = \tilde{K}^{-1}\tilde{P}_{n+1}$

c. $\dot{v}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t}\Delta v_n - \dot{v}_n$

d. $\ddot{v}_{n+1} = m^{-1}\left(P_{n+1} - c\dot{v}_{n+1} - kv_{n+1}\right)$

end

Alternativamente para casos no lineales es mejor restar dos pasos consecutivos

$$m\Delta\ddot{v}_{n+1} + c\Delta\dot{v}_{n+1} + k\Delta v_{n+1} = \Delta P_{n+1}$$

En este caso se puede utilizar el valor tangente para cada una de las propiedades de la estructura.

6. ENSAYOS EXPERIMENTALES

Se dispone de un gran número de opciones para realizar ensayos sobre estructuras. Entre las técnicas más utilizadas están: ensayo por condiciones iniciales o Pull Back, ensayo por vibración forzada y ensayo por excitación ambiental. La aplicación de uno u otro ensayo depende entre otros de:

1. Las condiciones de la estructura o sistema.
2. El uso de la estructura.
3. La disponibilidad de equipos excitación y registro.
4. Los plazos de realización del ensayo.
5. La precisión que se quiera obtener en los datos.
6. El costo del ensayo.

A continuación se describen en forma general las técnicas más comunes para la realización de ensayos. En el texto de Dinámica Estructural Avanzada se pueden encontrar con mayores detalles las técnicas utilizadas para la ubicación de la instrumentación de excitación y medición, las características técnicas del equipo de registros y los procedimientos más comunes de determinación de propiedades dinámicas.

6.1. CONDICIONES INICIALES O PULL BACK:

Aplicando condiciones iniciales de velocidad o desplazamiento se obtiene un régimen de oscilación libre ($f(t)=0$). Al graficar la respuesta del sistema en términos del desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza u otro, se puede determinar el período (T) y la razón de amortiguamiento (β). Si el desplazamiento y velocidad inicial es conocido en conjunto con la fuerza que los produce es posible determinar también constantes de rigidez, la masa y el amortiguamiento de la estructura.

Si el sistema es de varios grados de libertad es relativamente difícil conocer las matrices básicas de masa, rigidez y amortiguamiento. Generalmente lo que se obtienen son los las propiedades modales de la estructura.

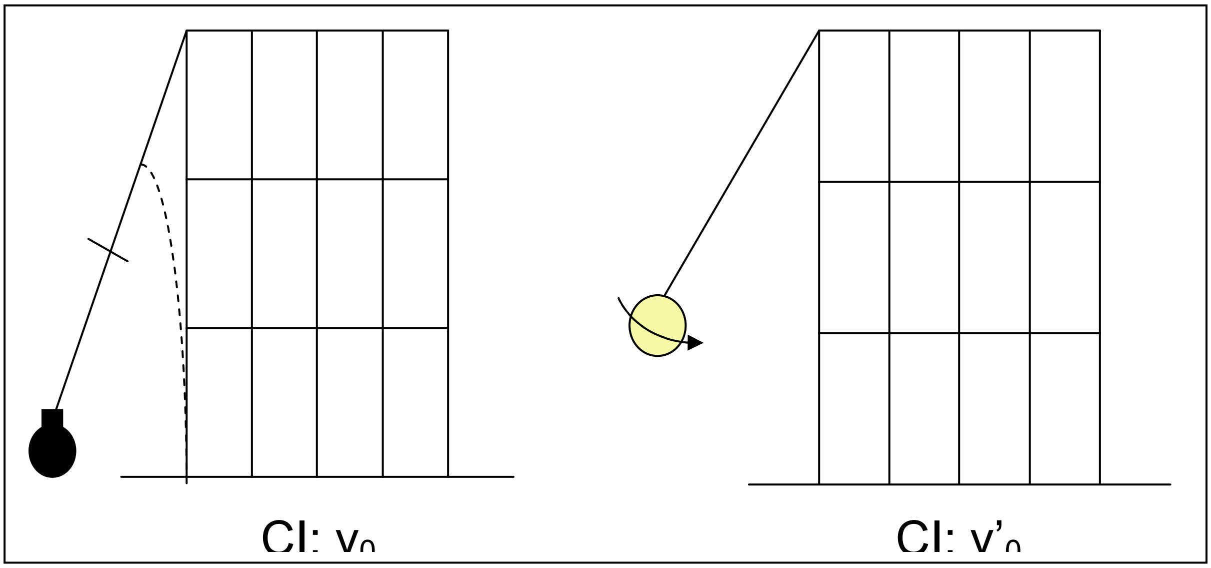


Figura 6.1: Ensayo Pull Back

Figura 6.2 Sistema de tiro para provocar desplazamiento inicial en Muelle de ventanas

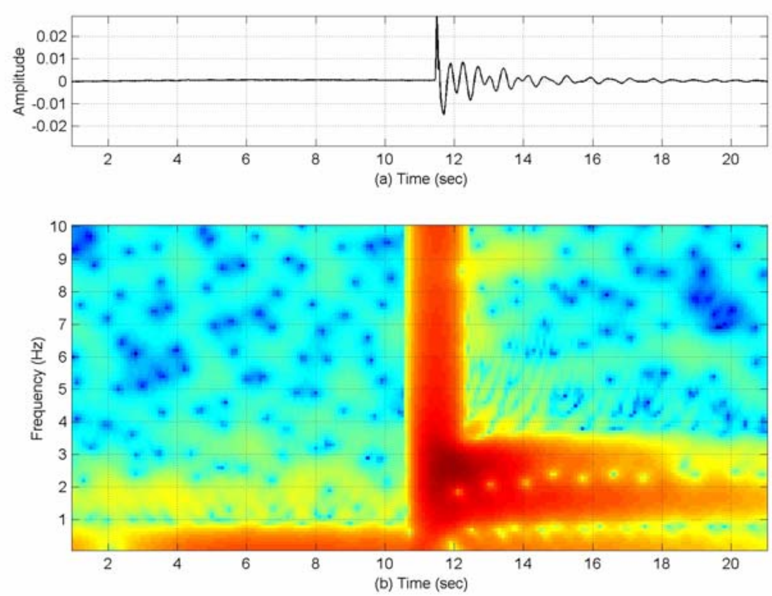


Figura 6.3 Respuesta ante liberación abrupta en muelle de ventanas. A) Registro de aceleración. B) Espectrograma de la respuesta

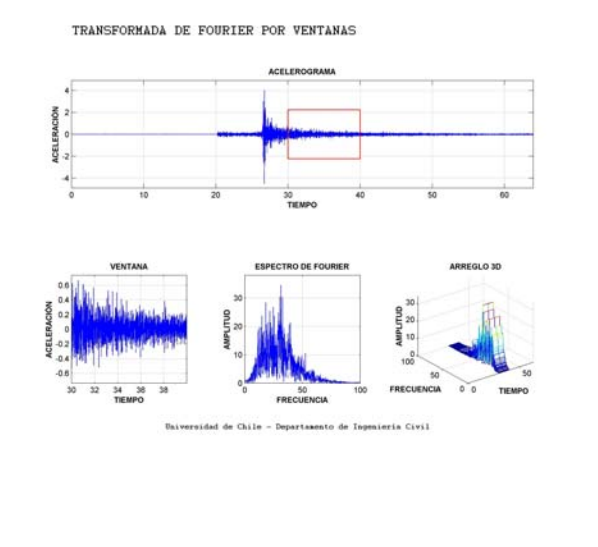


Figura 6.4 Definición de Espectrograma.

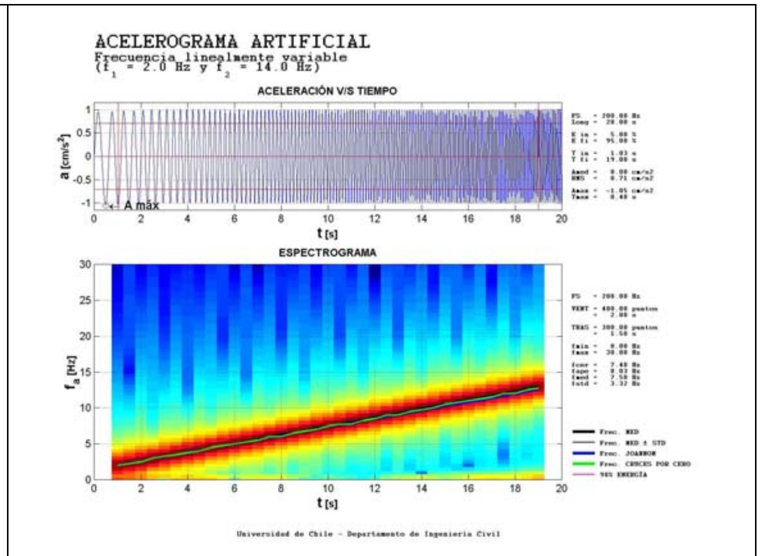
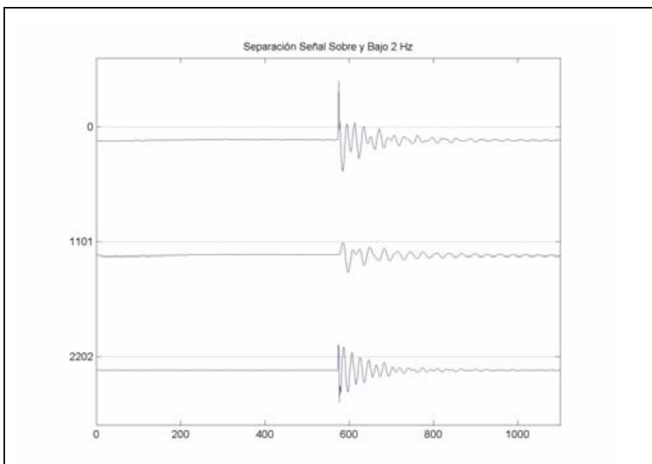
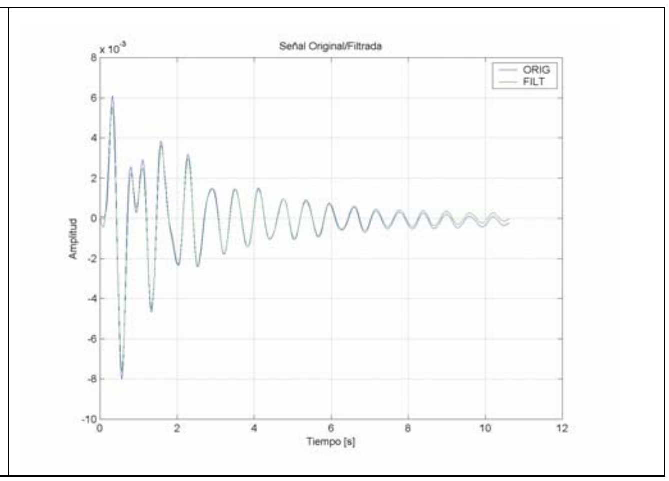


Figura 6.5 Ejemplo de espectrograma en un funciona armónica con frecuencia con variación lineal





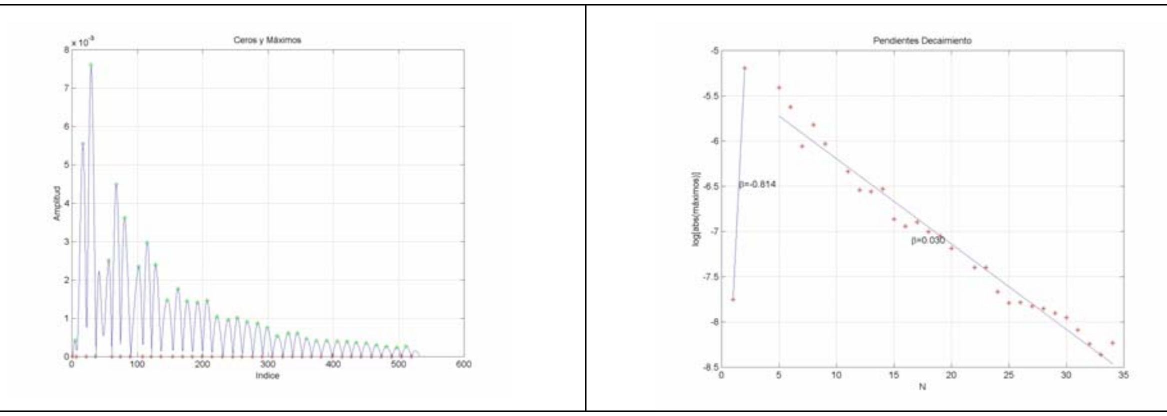


Figura 6.6 Ejemplo de aplicación del método de decremento logarítmico en estructuras de varios grados de liberad con frecuencias características bien separadas. A. Separación utilizando filtros de las distintas bandas predominantes. B) Señal filtrada. C) Selección de máximos absolutos. D) Grafica de máximos absolutos e identificación de amortiguamiento medio.

Figura 6.7 Impacto por salto en pasarela peatonal. Respuesta y ajuste a varias frecuencias mediante técnicas de optimización.

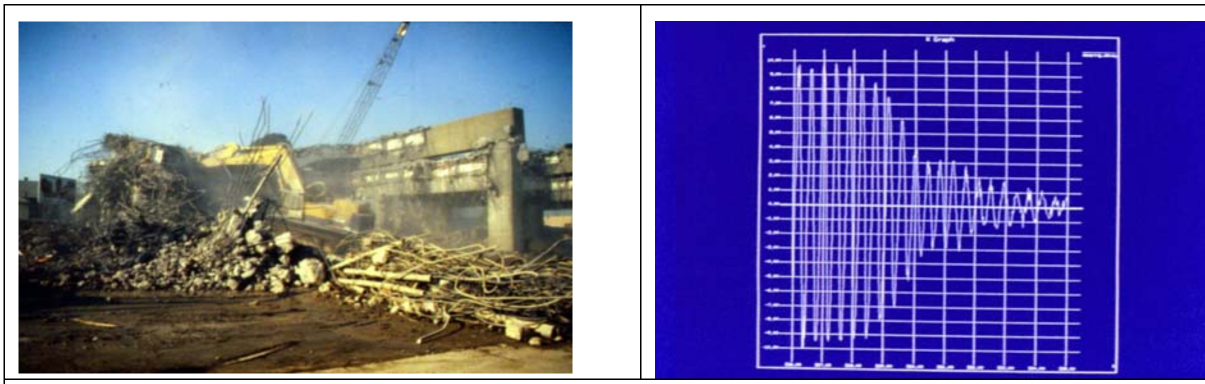


Figura 6.8 Aplicación de impactos mediante el golpe de una pala mecánica. Respuesta ante el impacto.

6.2. VIBRACIÓN FORZADA:

En este ensayo se instala una máquina en la estructura que genera una vibración con frecuencia y fuerza conocida. Normalmente este equipo de excitación se compone de dos masas excéntricas que rotan en dirección contraria. Alternativamente se utilizan gatos hidráulicos que mueven en forma unidireccional masas variables en la estructura. La maquina se hace oscilar a frecuencias conocidas y se determina el desplazamiento máximo. Posteriormente se grafica la respuesta máxima en función de la frecuencia de excitación. La grafica es posteriormente normalizada por el valor de frecuencia en el máximo. La grafica resultante es utilizada para determinar la frecuencia de la estructura y la razón de amortiguamiento utilizando el método de ancho de banda.

Para el caso de excitación fuerzas excéntricas, el valor de la fuerza aplicada depende de la maza excéntrica, su distancia al eje de rotación y la frecuencia de excitación ($p(t) = 2m_e e\overline{\omega}^2$).

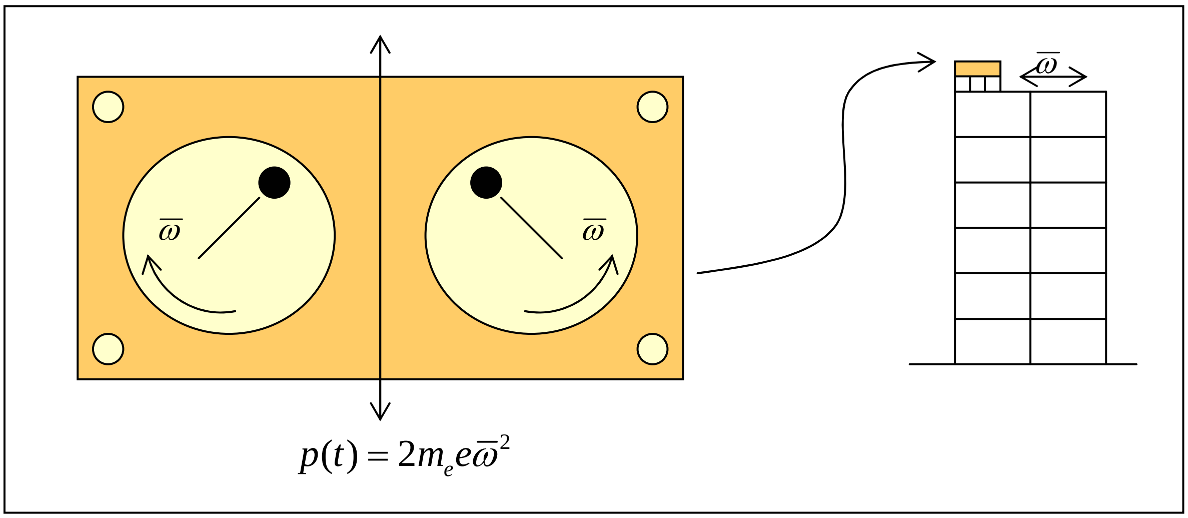
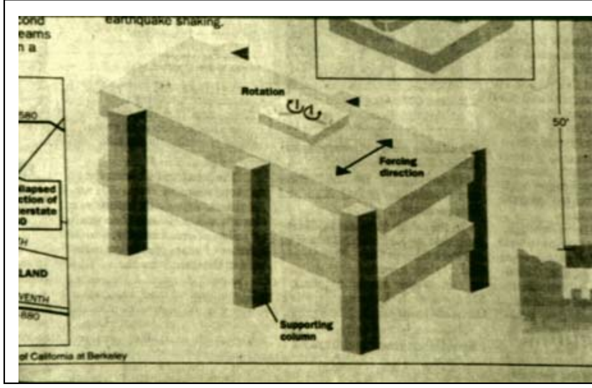


Figura 6.9: Ensayo con vibración forzada**.**



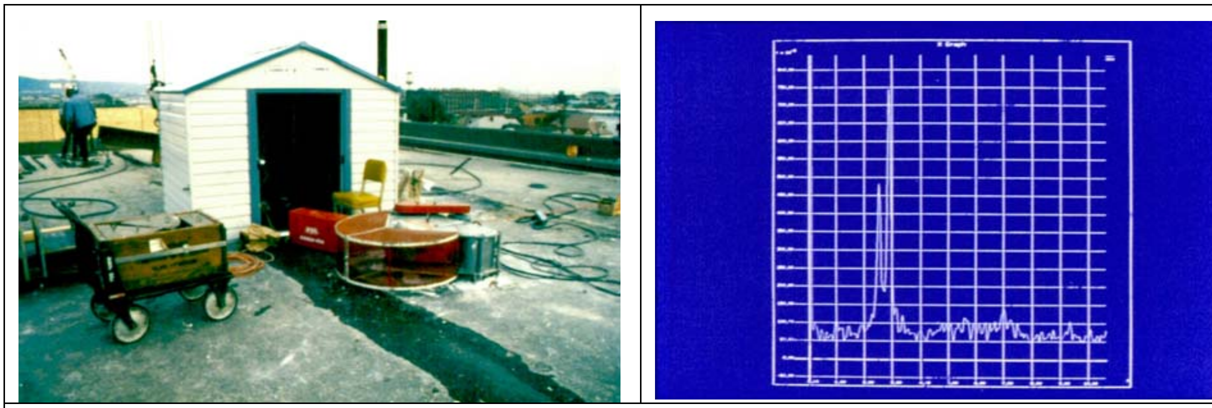


Figura 6.10 Utilización de masa excéntrica en viaducto Cypress EEUU, 1989.

6.3. EXCITACIÓN AMBIENTAL

Este ensayo es el más económico y consiste en colocar una serie de censores en la estructura de modo que registren los desplazamientos obtenidos gracias a la excitación ambiental a la que está expuesta la estructura diariamente (viento, transito, microtemblores, uso, otros). De los datos obtenidos se identifican por medio de métodos estadísticos los parámetros modales fundamentales de la estructura. Los métodos mas conocidos son la Descomposición en el Dominio de la Frecuencia y la Identificación del Subespacio Estocástico en el dominio del Tiempo. Una descripción de estos métodos se encuentra en el texto de Dinámica Avanzada de Estructuras.

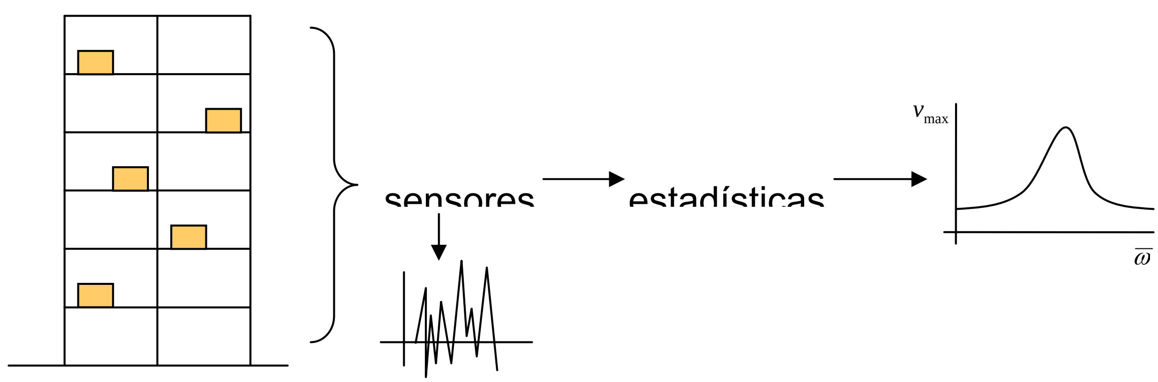
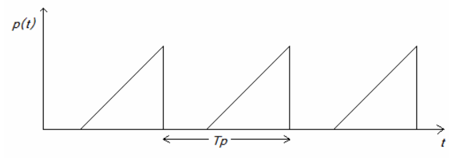


Figura 6.11: Ensayo con excitación ambiental.

7. ANÁLISIS EN EL ESPACIO DE LA FRECUENICA

7.1. SERIE DE FOURIER

Cualquier excitación periódica, $P(t)$, puede ser transformada en una sumatoria de funciones trigonométricas básicas de acuerdo a los conceptos de Serie de Fourier:



$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_p}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{2\pi nt}{T_p}\right)$$

Donde:

$$a_0 = \frac{1}{T_p}\int_0^{Tp} P(t)dt\,;\quad a_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{Tp} P(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T_p}\right)dt\,;\quad b_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{Tp} P(t)sen\left(\frac{2\pi nt}{T_p}\right)dt$$

T_p Es el período de la función $P(t)$

Definimos las siguientes variables $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_p} = \Delta\omega$ y $\omega_n = n\Delta\omega$

Ejemplo:

Dada la función rampa de la Figura. Su composición se presenta en las Figuras para 7 y 201 coeficientes (dinaFourieCoef.m).

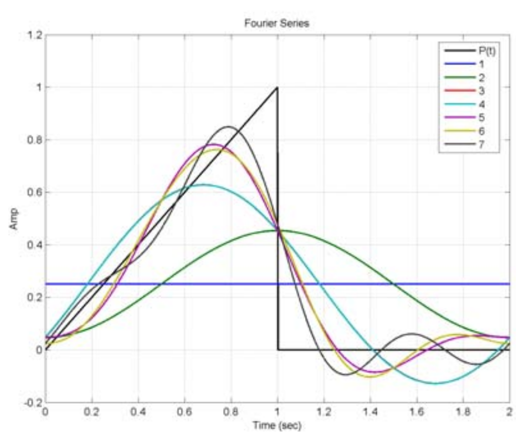
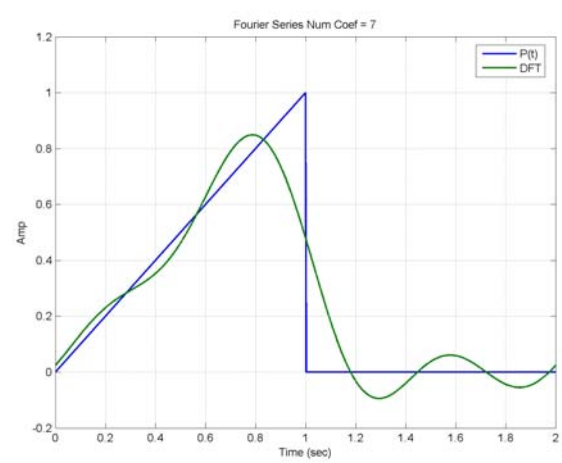
	

Figura 7.1	Figura 7.2

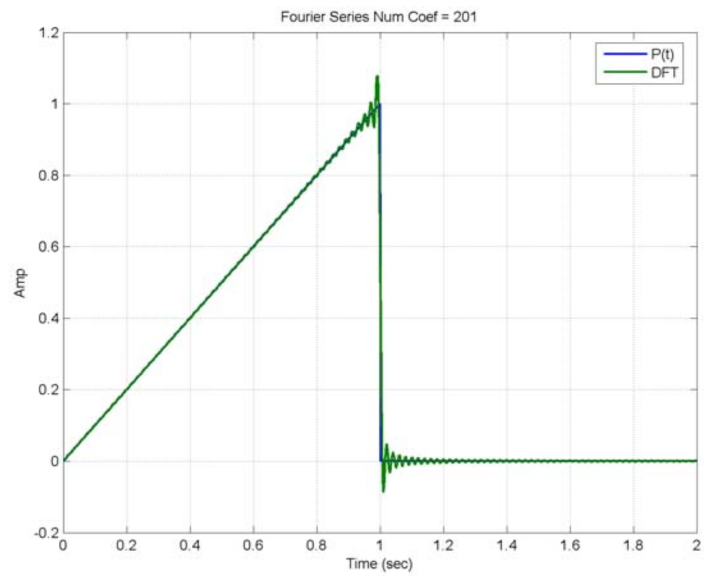


Figura 7.3

8. RESPUESTA EN FRECUENCIA DE UN OSCILADOR DE 1GDL

8.1. CASO SERIE DE FOURIER BASE

$$m\ddot{v}(t)+c\dot{v}(t)+kv(t)=p(t) \quad \text{con} \quad p(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T_p}t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T_p}t\right)$$

$$v(t)=\frac{1}{k}\left(\begin{array}{l} a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{\left(1-\left(\frac{\bar{\omega}_n}{\omega}\right)^2\right)^2+2\beta\left(\frac{\bar{\omega}_n}{\omega}\right)^2}\right]\times \\ \left\{\left[2\beta\frac{\bar{\omega}_n}{\omega}a_n+b_n\left(1-\left(\frac{\bar{\omega}_n}{\omega}\right)\right)^2\right]sen\left(\bar{\omega}_n t\right)+\left[a_n\left(1-\left(\frac{\bar{\omega}_n}{\omega}\right)^2\right)-b_n 2\beta\frac{\bar{\omega}_n}{\omega}\right]\cos\left(\bar{\omega}_n t\right)\right\}\end{array}\right)$$

$\bar{\omega}_n=n\Delta\bar{\omega}$ y

8.2. RELACIÓN DE COEFICIENTES DE SERIE DE FOURIER ARMÓNICOS Y EXPONENCIAL COMPLEJO.

$$p(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T_p}t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T_p}t\right)$$

$$\cos(x)=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) \quad \sin(x)=-\frac{1}{2}i(e^{ix}-e^{-ix})$$

$$p(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{1}{2}\left(e^{in\Delta\omega t}+e^{-in\Delta\omega t}\right)-i\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{1}{2}\left(e^{in\Delta\omega t}-ie^{-in\Delta\omega t}\right)$$

$$p(t)=a_0+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{in\Delta\omega t}\left(a_n-ib_n\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-in\Delta\omega t}\left(a_n+ib_n\right)$$

Si $c_n=\frac{1}{2}\left(a_n-ib_n\right) \quad c_n^*=\frac{1}{2}\left(a_n+ib_n\right)$ y con $c_o=a_o$

$$p(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{in\Delta\omega t}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n^* e^{-in\Delta\omega t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\Delta\omega t}$$

8.3. REPRESENTACIÓN COMPLEJA DE LA SERIE DE FOUIER

A partir de la ecuación de equilibrio $m\ddot{v}(t)+c\dot{v}(t)+kv(t)=c_n e^{i\varpi_n t}$

Solución $v_p(t)=G_n e^{i\varpi_n t}$; $\dot{v}_p(t)=i\varpi_n\left(G_n e^{i\varpi_n t}\right)$; $\ddot{v}_p(t)=-\varpi_n^{\,2}\left(G_n e^{i\varpi_n t}\right)$

Reemplazando en la ecuación de equilibrio

$$G_n(-m\varpi_n^{\,2}+ci\varpi_n+k)=c_n$$

$$G_n=c_n\frac{1}{(k-m\varpi_n^{\,2}+ic\varpi_n)}$$

$$G_n=\frac{c_n}{k}\frac{1}{\left[1-\left(\frac{\varpi_n}{\omega_n}\right)^2+i\left(\frac{\varpi_n}{\omega_n}\right)2\beta\right]}$$ entonces $G_n=c_n H(\varpi_n)$

$$H(\varpi_n)=\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{1-\gamma_n^{\,2}+2\beta\gamma_n i}\right)$$ con $\gamma_n=\frac{\varpi_n}{\omega}$

Finalmente la respuesta permanente es: $v_p(t)=c_n H(\varpi_n)e^{i\varpi_n t}$

La solución a una excitación periódica arbitraria

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\varpi_n t}$$

Como $v(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n H(\varpi_n)e^{i\varpi_n t}$

8.4. PAR DE TRANSFORMADA DE FOURIER

$$T_p \to \infty \quad \overline{\omega}_n \to \overline{\omega} \quad c_n \to c(\overline{\omega})$$

Para extender a señales no periódicas, se hace tender el límite de $T_p \to \infty$

8.5. RESPUESTA UTILIZANDO LA TRANSFORMADA DE FOURIER

A partir del par de Transformada de Fourier

$$p(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} c(\overline{\omega})\exp(i\overline{\omega}t)d\overline{\omega}$$

$$c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t)\exp(-i\overline{\omega}t)dt$$

Encontramos la respuesta continua:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\overline{\omega})c(\overline{\omega})\exp(i\overline{\omega}t)d\overline{\omega}$$

Otros parámetros de respuesta pueden obtenerse de la propiedad de derivada en el espacio de la frecuencia

Dado una excitación: $\Im\left\{p(t)\right\} = P(f)$

FRF: $H(\overline{\omega}) = \dfrac{1}{k}\left[\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^2 + 2i\beta\left(\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}\right)}\right]$

Dado que la derivada en el espacio de la frecuencia

$$\Im\left\{\frac{d^n v(t)}{dt^n}\right\} = \left(i\overline{\omega}\right)^n \Im\left\{v(t)\right\}$$

$$v(t) = \Im^{-1}\left\{P(\omega)H(\omega)\right\} \quad \dot{v}(t) = \Im^{-1}\left\{i\omega P(\omega)H(\omega)\right\} \quad \ddot{v}(t) = \Im^{-1}\left\{\left(i\omega\right)^2 P(\omega)H(\omega)\right\}$$

Debido a la forma en que se entrega el espectro de Fourier para índices positivos solamente es necesario desdoblar las frecuencias y la respuesta al impulso en el espacio de frecuencia.

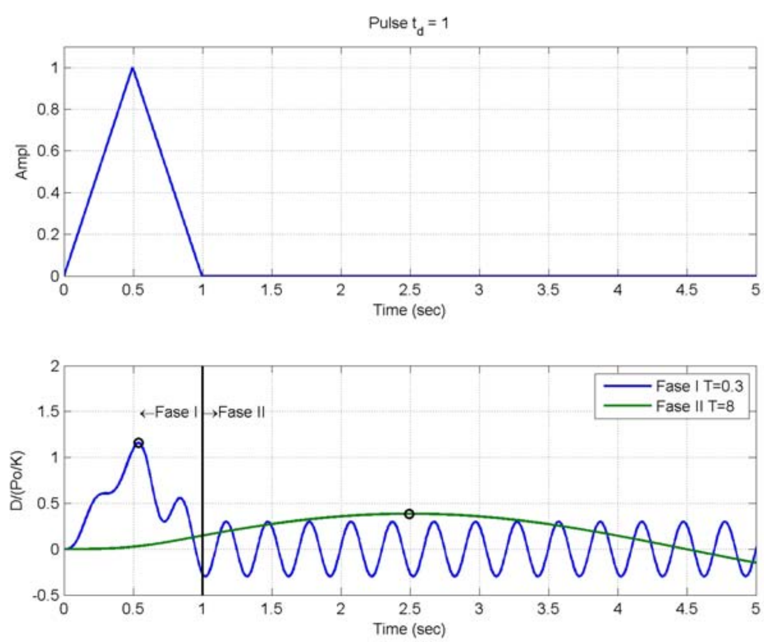
(respfre.m)

```
% senal en el espacio de la frecuencia
Pw=fft(P);
 %%Definicion de simetria de FRF
if ~any(any(imag(P)~=0)),   % if x is not complex
```

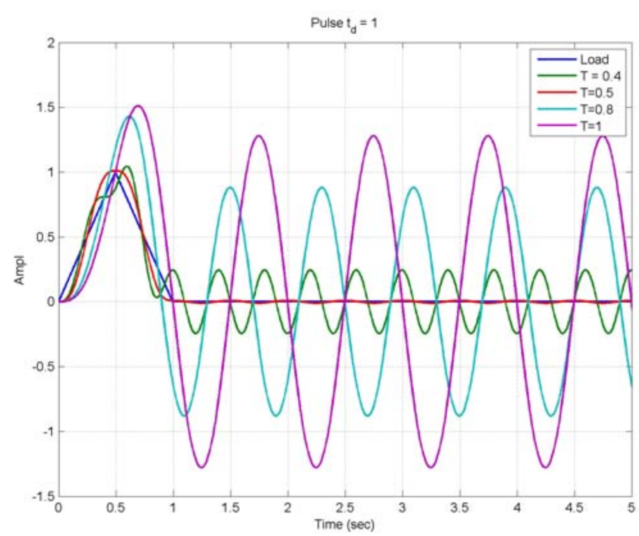
```
    if rem(nP,2),          % nfft odd
        select = (1:(nP+1)/2)';
    else
        select = (1:nP/2+1)'; %% par
    end
else
    select = (1:nP)'; %% complejo
end
 f = (select - 1)*Fs/nP;
 % Funcion de Respuesta en Frecuencia Single Sided
FRF=zeros(nP,1);
fratio=f/fo;
unos=ones(length(f),1);
% Para señal compleja.
FRF(select)=(unos/k)./(unos-(fratio).^2+(j*2*beta).*(fratio));
 %% Correccion para doble sided spectra
if ~any(any(imag(P)~=0)),   % if P is not complex
    % correcion de frecuencia
    f=[f ; zeros(nP-length(f),1)];
    if rem(nP,2),          % nfft odd
        FRF(select(end)+1:end)=conj(FRF(((nP+1)/2):-1:2));  % Symetric
        f(select(end)+1:end)=-f(((nP+1)/2):-1:2); % Notar signo negativo.
    else
        FRF(select(end)+1:end)=conj(FRF(nP/2:-1:2)); %% impar no se consider
punto central
        f(select(end)+1:end)=-f((nP/2):-1:2);
    end
end
 d=real(ifft(FRF.*Pw));
v=real(ifft((j*f*2*pi).*FRF.*Pw));
a=real(ifft((j*f*2*pi).^2.*FRF.*Pw));
```

9. PULSO

Un pulso es una acción que esta acotada en el tiempo y se puede tratar en forma aproximada separando en dos posibles fases la respuesta de la estructura:



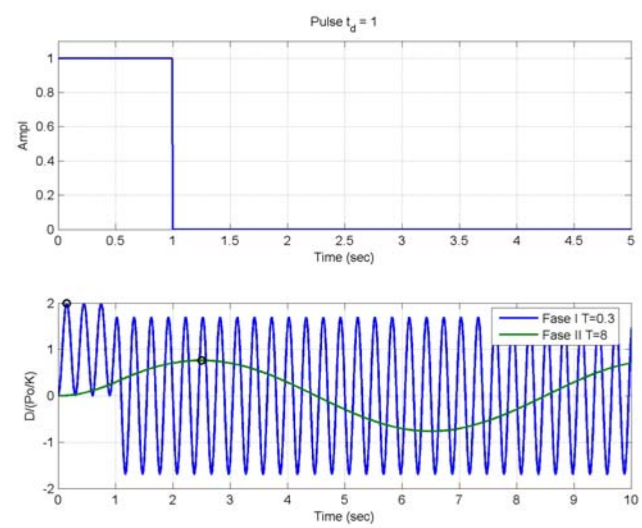
La Fase 1 bajo la presencia de una acción externa y la fase II bajo oscilación libre con condiciones iniciales. Dinapulso.m



La respuesta varia de acuerdo a la relación entre duración del pulso y periodo del sistema.

Es conveniente estudiar el comportamiento ante algunos pulsos básicos. Se desarrolla el caso de pulso rectangular. En general la respuesta máxima no esta influida por el amortiguamiento en forma significativa. Los desarrollos se realizan sin amortiguamiento y luego se comparan con respuestas amortiguadas.

9.1. PULSO RECTANGULAR



Dinapulsorec.m

9.1.1. Fase I: Respuesta Máxima Bajo Aplicación de la Carga

$$si \quad t \le t_d$$

$$m\,\ddot{v}(t) + k\,v(t) = p(t) = p_0$$

Solución

$$v_p(t) = G \Rightarrow G = \frac{p_0}{k}$$

$$v(t) = \left(A\,sen\,\omega t + B\cos\omega t\right) + \frac{p_0}{k}$$

$$si \;\; v(0) = 0 \qquad \dot{v}(0) = 0$$

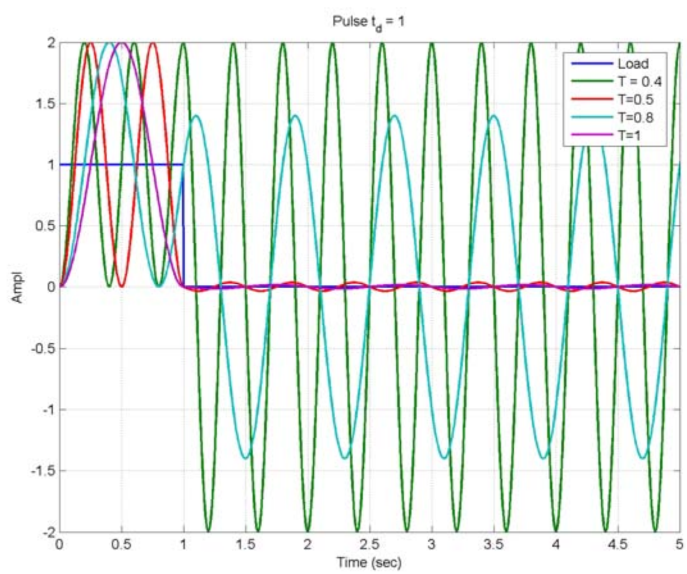
$$v(0) = 0 + B + \frac{p_0}{k} \qquad B = -\frac{p_0}{k}$$

$\dot{v}(t) = \omega\left(A\cos\omega t - B\,sen\,\omega t\right) = 0$ entonces $A = 0$

Final solución: $v(t)=\dfrac{p_0}{k}\left(1-\cos\omega t\right)$

El valor máximo es:

$v_{\max}=\left|\dfrac{p_0}{k}\left(1-\cos\omega t\right)\right|=2\dfrac{p_0}{k}$ y ocurre para ${t_d}/{T}\geq 1/2$ dado que $\omega={2\pi}/{T}$



9.1.2. Fase II: Respuesta Máxima Bajo Aplicación Nula

$si \quad t\geq t_d$

$m\,\ddot{v}(t)+k\,v(t)=p(t)=0$

Por tanto la solución es oscilación libre

$v(t-t_d)=A\cos\omega\left(t-t_d\right)+B\,sen\omega\left(t-t_d\right)$

$t'=t-t_d$

Condicion inicial para oscilación libre

$$v\left(t'=0\right)=v\left(t_d\right)=\frac{p_0}{k}\left(1-\cos\omega t_d\right)$$

$$\dot{v}\left(t'=0\right)=\dot{v}\left(t_d\right)=\frac{p_o}{k}\omega\ sen\ \omega t_d$$

Sabemos que:

$$v(t-t_d)=v(t'=0)\cos\omega\left(t-t_d\right)+\frac{\dot{v}(t'=0)}{\omega}sen\omega\left(t-t_d\right)$$

$$v_{\max}=\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{v^2\left(0\right)+\left(\frac{\dot{v}(0)}{\omega}\right)}=\frac{P_0}{k}\sqrt{\left(1-\cos\omega t_d\right)^2+\frac{\omega^2 sen^2\omega t_d}{\omega^2}}$$

$$=\frac{p_0}{k}\sqrt{1-2\cos\omega t_d+\cos^2\omega t_d+\omega^2\frac{sen^2\omega t_d}{\omega^2}}$$

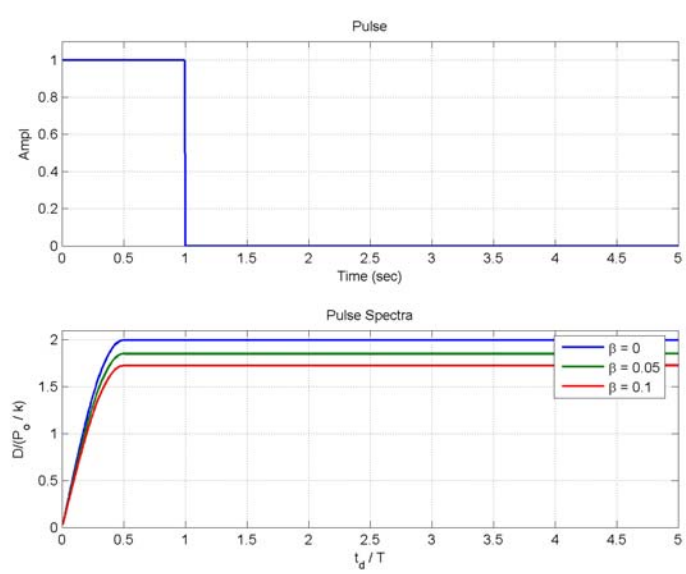
$$=\frac{p_0}{k}\sqrt{2\left(1-\cos\omega t_d\right)}=\frac{p_0}{k}\sqrt{2\left(2-\cos 2\pi\frac{t_d}{T}\right)}$$

$$v_{\max}=2\frac{p_0}{k}sen\pi\frac{t_d}{T}\text{ para }\frac{t_d}{T}<\frac{1}{2}$$

9.1.3. Espectro de Respuesta al Impulso

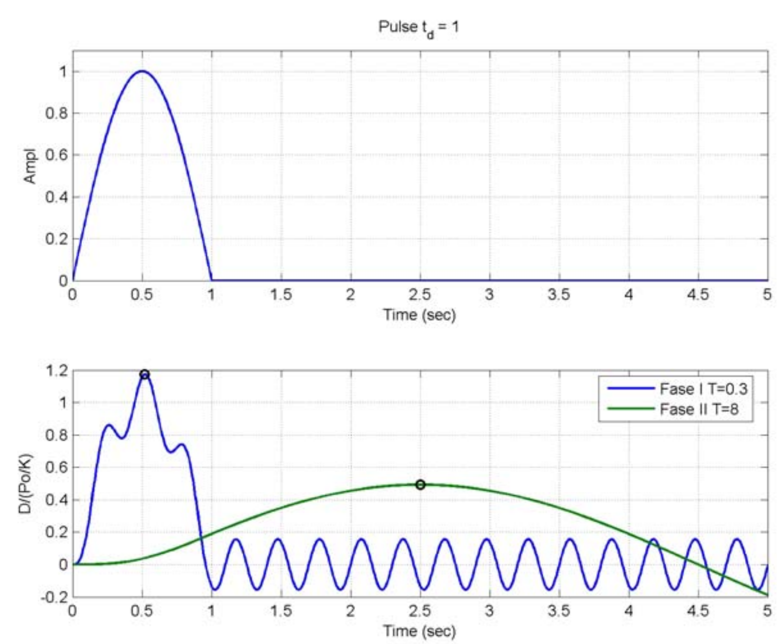
Sea $D=\frac{v_{\max}}{P_0/k}$

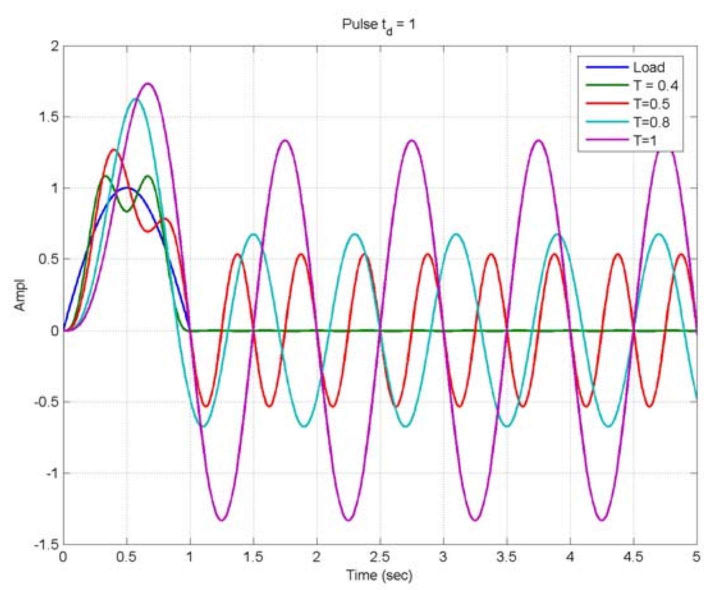
Espectro (envolvente de todas las respuestas)

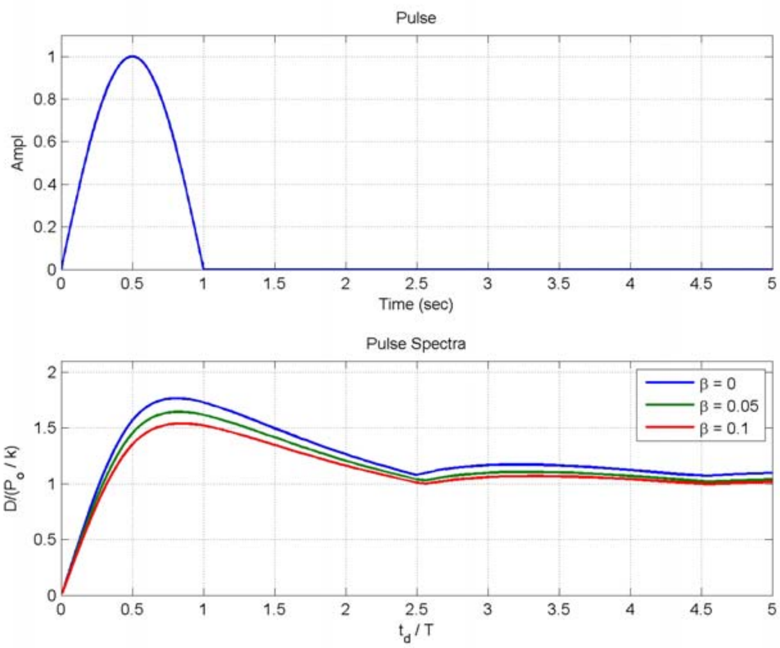


Se presenta la respuesta para todas las razones de duración período y distinto amortiguamiento. Dinapulsosen

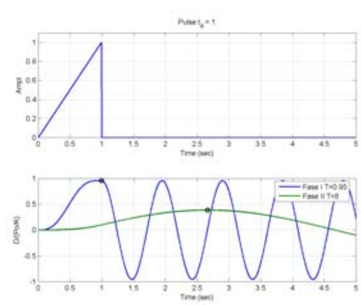
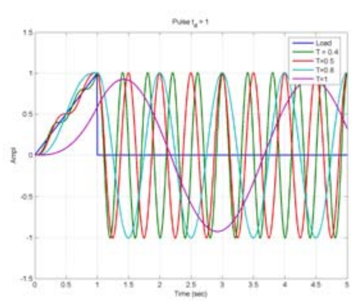
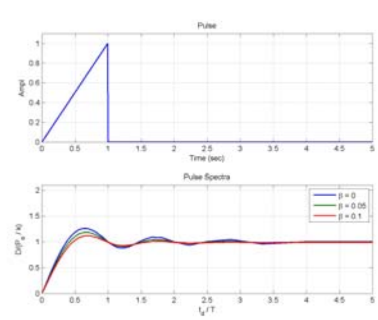
9.2. PULSO SENOSOIDAL



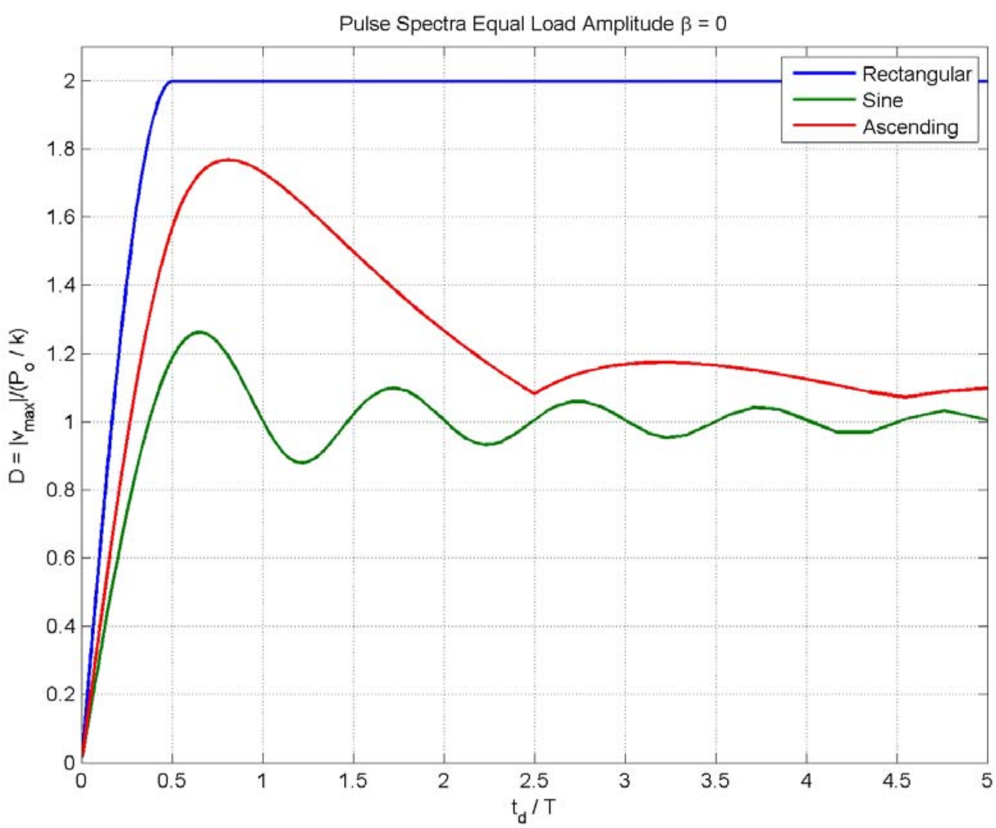




9.3. PULSO ASCENDENTE

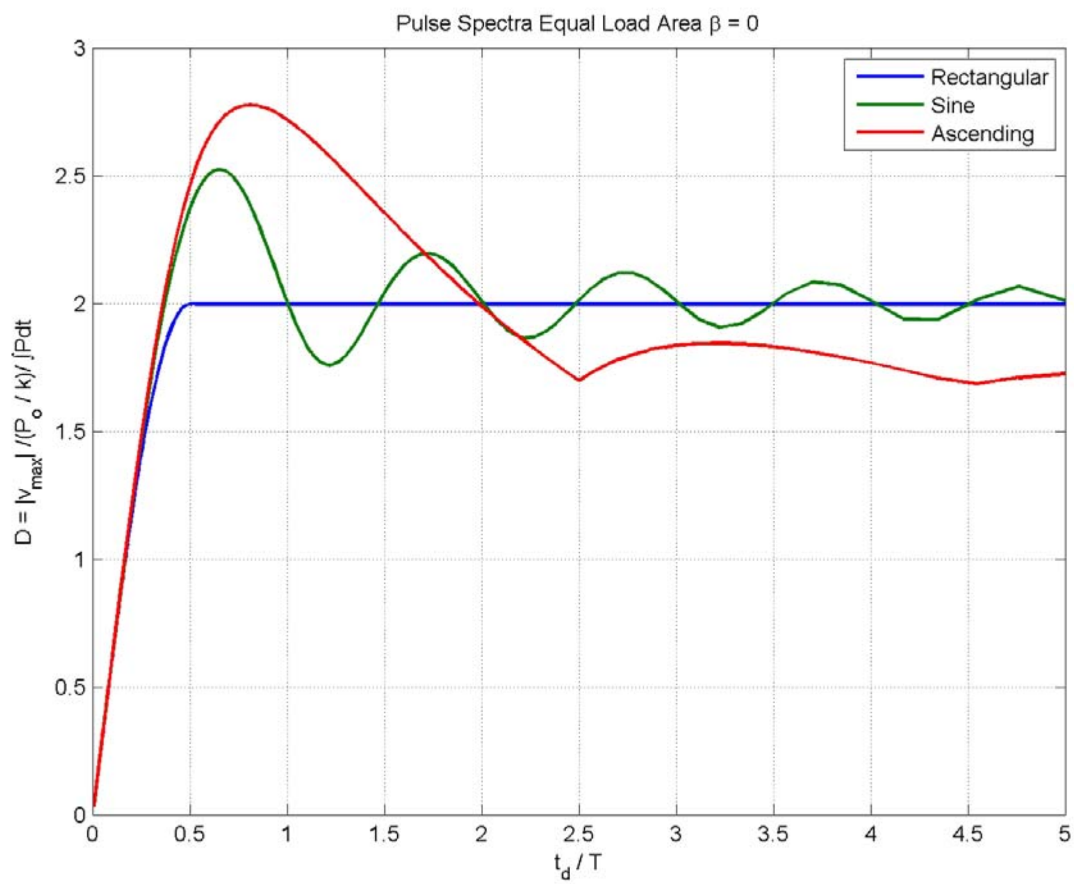
		

9.4. COMPARACIÓN PULSOS



Compara pulsos de igual amplitud y duración. dinaPulsoCompara.m

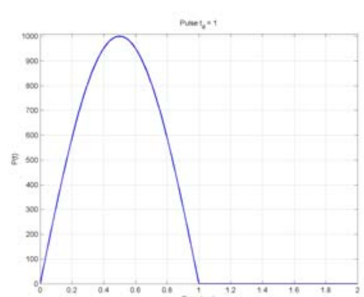
Si no hay cruces por cero $\Rightarrow D_{\max} = 2$



Compara pulsos de igual área bajo el pulso.(Normalizada para el caso de rectangurlar).

9.5. EJEMPLO:

Suponga una excitación tipo Seno de duración un segundo



$$P_0 = 1000; \quad t_d = 1$$

$$k = 4; \quad m = 1$$

$$\frac{t_d}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4}{1}} = 0.333 \Rightarrow D \approx 1.2$$

$$v_{\max} = \frac{P_0}{k} D \quad Q_{\max} = k v_{\max} = P_0 D$$

10. IMPACTO

En impacto se dice que el Δt es tan pequeño que el amortiguador y el resorte no alcanzan a ser excitados. Por tanto el impacto es una acción muy corta en el cual los desplazamientos durante la aplicación de la carga se pueden despreciar.

Si $\frac{t_1}{T} < \frac{1}{4}$ se cumplen las simplificaciones asociadas a las ecuaciones de impacto

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = P(t) \qquad \text{Y } c = 0$$

$$\ddot{v}(t) = \frac{P(t)}{m} - \frac{k}{m}v(t)^{\nearrow \approx 0} \qquad v(t) \rightarrow 0$$

$$\dot{v}(t) = \int \ddot{v}(t)dt = \int_0^{t_1} \frac{P(t)}{m}dt$$

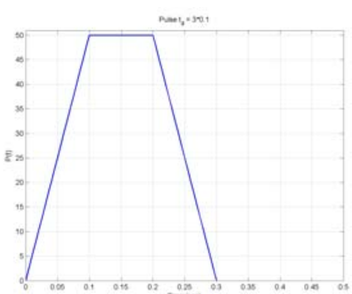
Movimiento libre:

$$v(t) = v_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{v}_o}{\omega} sen(\omega t)$$

$$v_{II}(t - t_1) = \frac{\dot{v}(t_1)}{\omega} sen(\omega t - t_1)$$

$$v_{II}(t - t_1) = \frac{1}{m\omega}\left(\int_0^{t_1} P(t)dt\right) sen(\omega(t - t_1))$$

Ejemplo

	$P_0 = 50 \quad t_d = 0.1 \quad T = 1.2$ $\int P(t)dt$ $\frac{3t_d}{T} = \frac{0.3}{1.2} < 1/4$ $v_{max} = \left\| \frac{1}{m\omega} * 10 \right\|$

11. CARGA ARBITRARIA EN EL TIEMPO

La respuesta de UN impacto unitario se escribe como:

$$v(t-t_1)=\frac{1}{m\omega_d}\left(\int_0^{t_1}P(t)dt\right)e^{-\beta\omega(t-t_1)}sen(\omega_d(t-t_1))$$

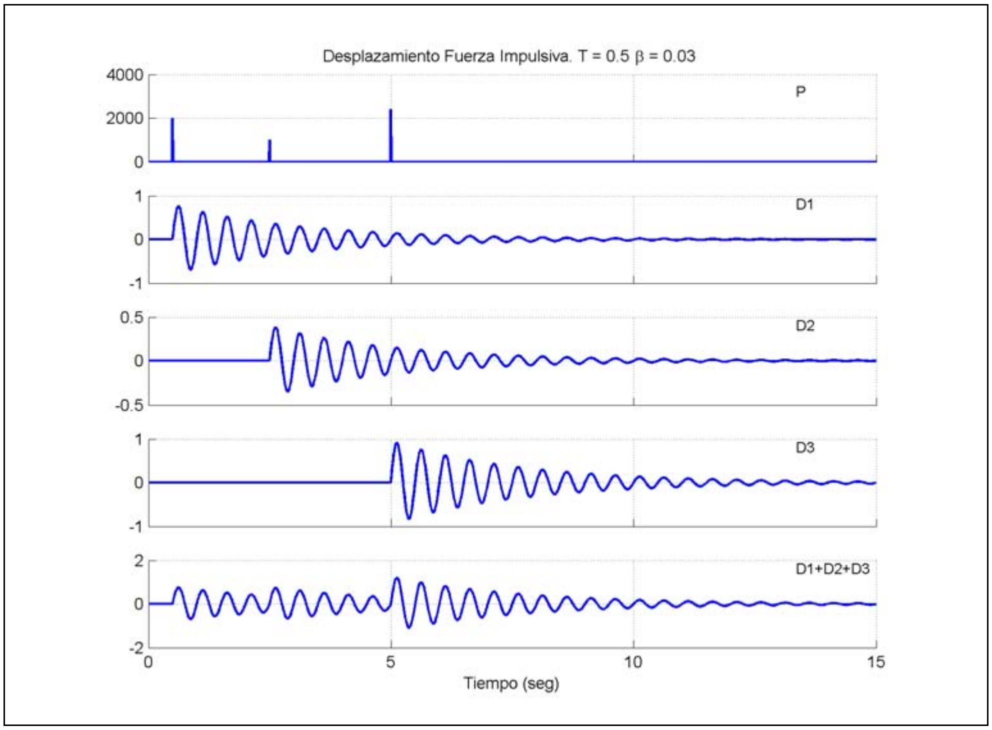
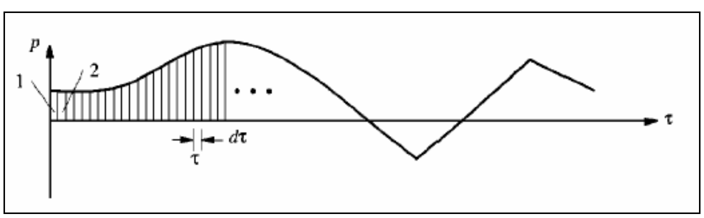


Figura 11.1

Para varios impactos



$$v(t)=\frac{1}{m\omega_D}\sum P(\tau)\Delta t\exp(-\beta\omega(t-\tau))sen(\omega_D(t-\tau))$$

En el caso de una secuencia infinita de impactos

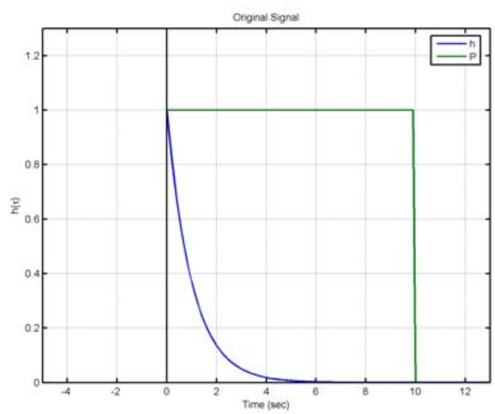
$$mv(t)+cv(t)+kv(t)=P(t)$$

$$v(t)=\frac{1}{m\omega_D}\int_0^t P(\tau)\exp(-\beta\omega(t-\tau))sen(\omega_D(t-\tau))d\tau \rightarrow$$ Integral de Duhamel

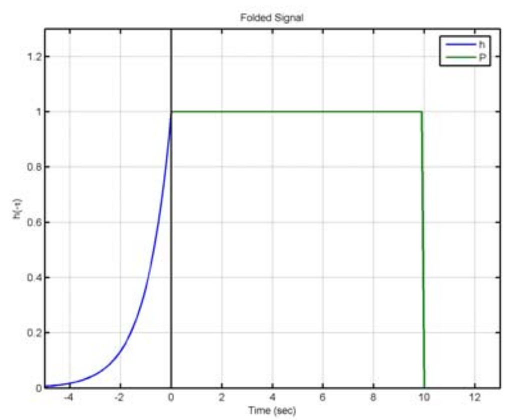
$$v(t)=\int_0^t P(\tau)h(t-\tau)d\tau \rightarrow$$ Integral de Convolución

$$h(\tau)=\frac{1}{m\omega_D}\exp(-\beta\omega\tau)sen(\omega_D\tau) \rightarrow$$ Respuesta impulso unitario

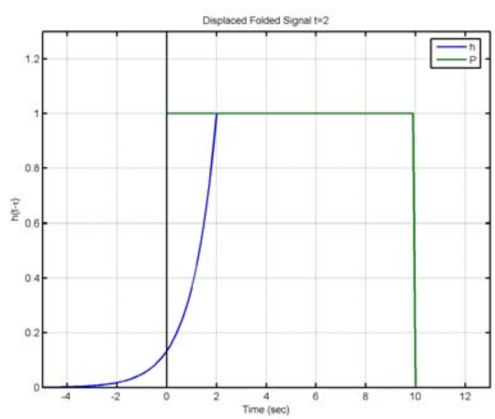
La convolución implica tres pasos fundamentales:



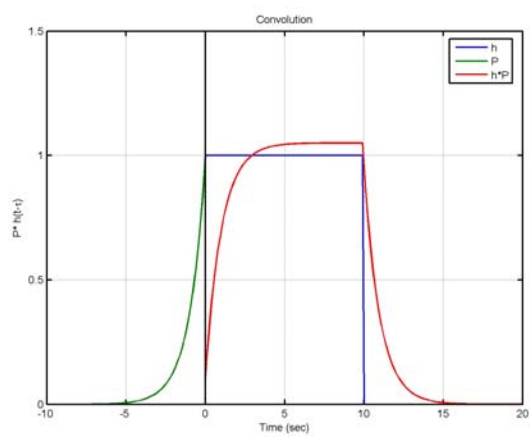
Dinaconvu.m Función original



Desdoblamiento



Desplazamiento



Convolución

12. ESPECTRO Y PSEUDO ESPECTROS DE RESPUESTA

12.1. CONCEPTOS BÁSICOS DE SISMICIDAD Y ONDAS.

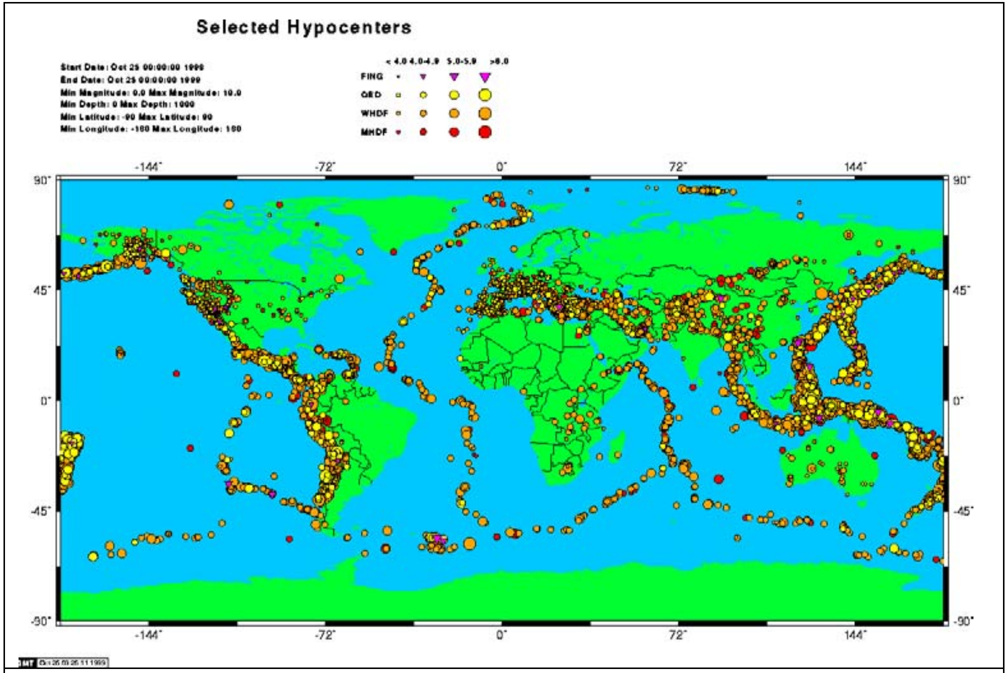


Figura 12.1Distribución de sismos en el planeta en un periodo de un año.

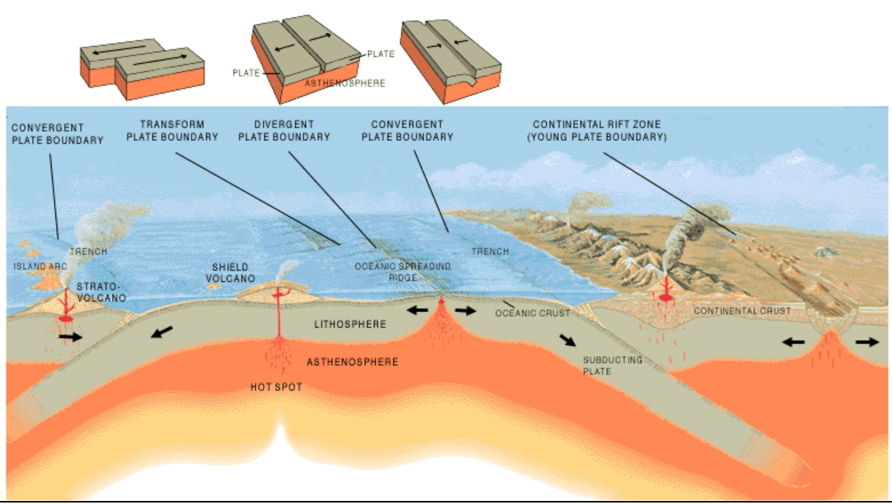
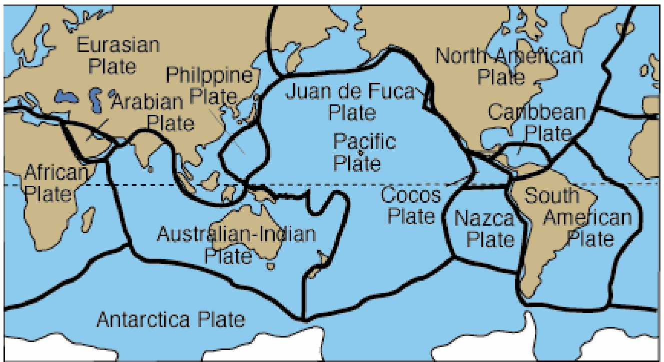
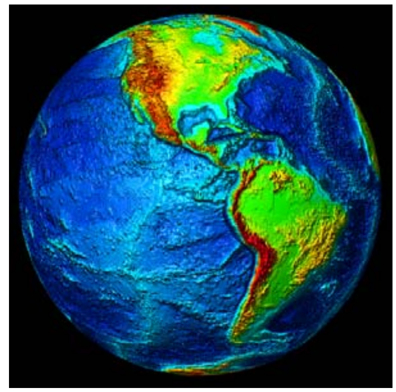
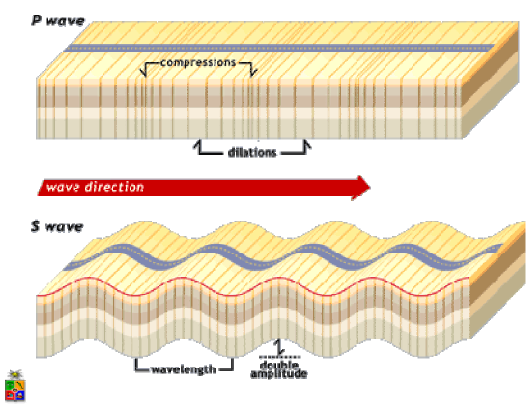
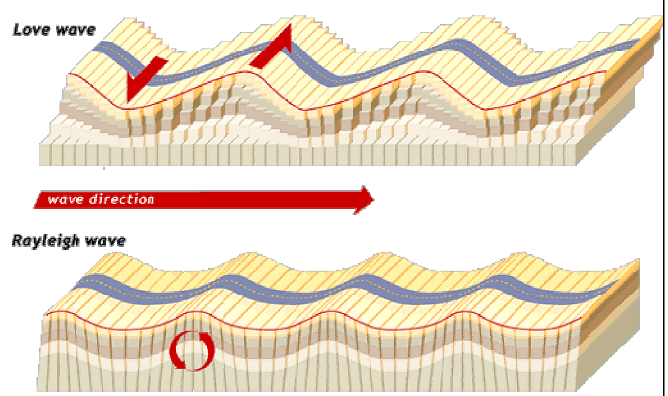


Figura 12.2 Generación e interacción de placas de la corteza terrestre.

<table>
<tr><td>

Major tectonic plates of the world.</td><td></td></tr>
<tr><td>Figura 12.3</td><td>Topografia digital de america. Los bordes de placa quedan identificados.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Figura 12.4Ondas de Cuerpo</td><td>Ondas Superficiales</td></tr>
</table>

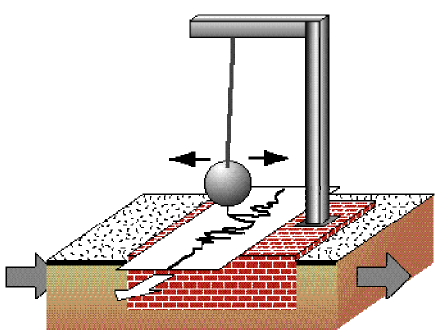
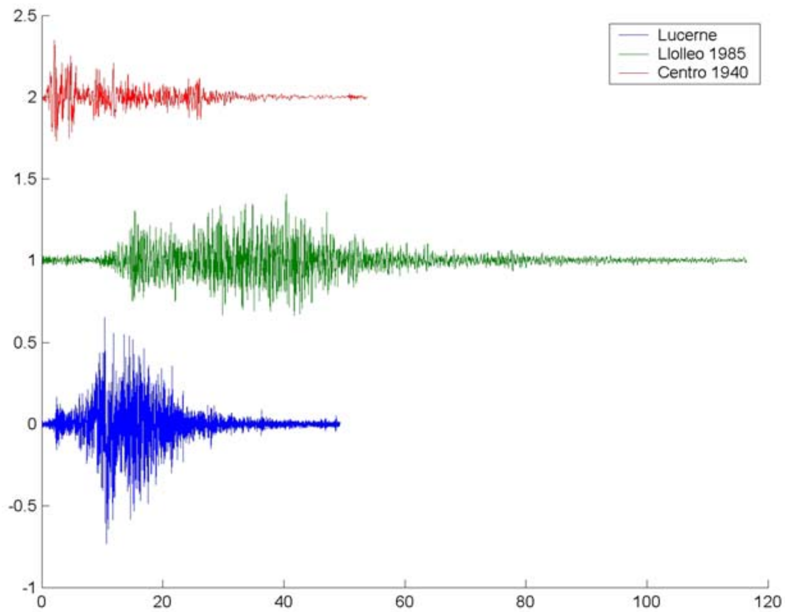
<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Figura 12.5 Esquema básico de un registrados sísmico inercial</td><td>Sistema real de registro.</td></tr>
</table>

Figura 12.6 Distribución de sismos en Chile en un siglo.



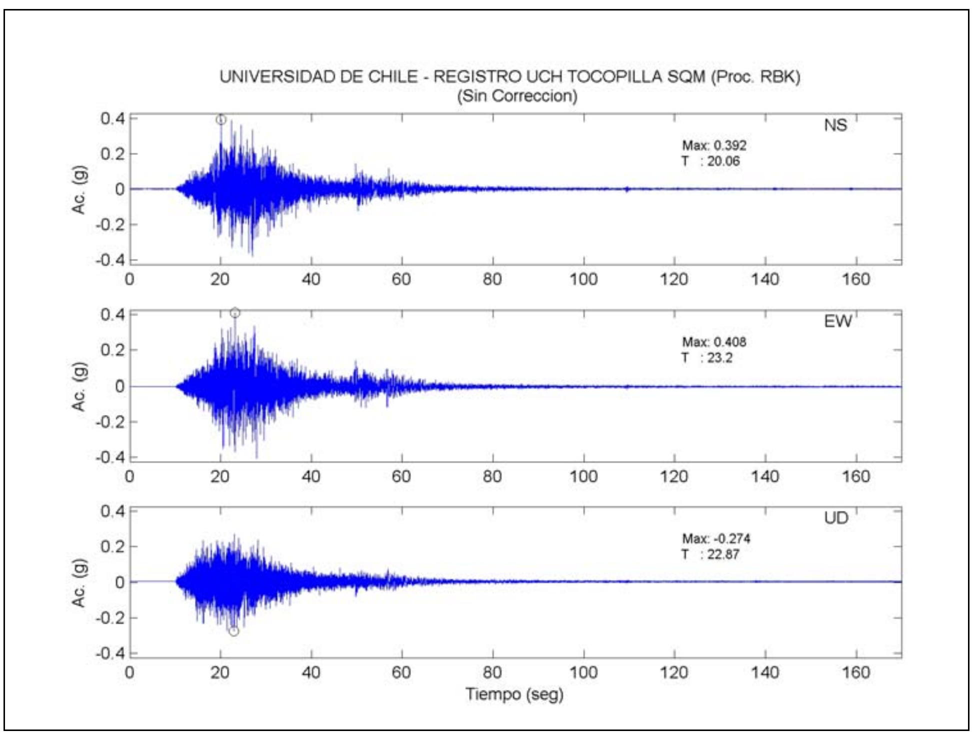
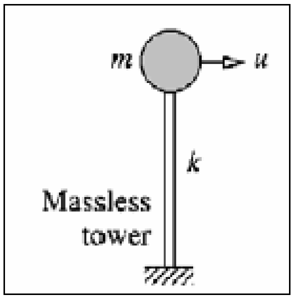
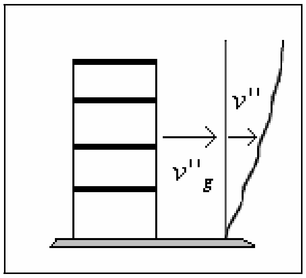


Figura 12.7 Registro epicentral obtenido en roca. Sismo del Terremoto de Tocopilla del 14 de Noviembre del 2007.





$$F_I(t)+F_D(t)+F_E(t)=0 \qquad m\ddot{v}^t(t)+c\dot{v}(t)+kv(t)=0$$

$$\ddot{v}^t(t)=\ddot{v}_g(t)+\ddot{v}(t)$$

$$m\ddot{v}(t)+c\dot{v}(t)+kv(t)=-m\ddot{v}_g(t)=P_e(t)$$

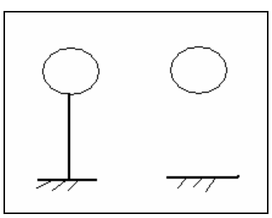
La respuesta a esta excitación es la integral de Duhamel

$$v(t)=\frac{-1}{\omega_D}\int_0^t \ddot{v}_g(t)\exp(-\beta\omega(t-\tau))sen(\omega_d(t-\tau))d\tau$$

12.2. ESPECTROS DE DESPLAZAMIENTOS RELATIVOS

$$v(t)=\frac{-1}{\omega_d}\int_0^t \ddot{v}_g(t)\exp(-\beta\omega(t-\tau))sen(\omega_d(t-\tau))d\tau$$

$$Sd(T,\beta)=\max|v(t)|$$



$$\rightarrow \ddot{v}_g(t) \qquad T\rightarrow\infty$$

Nota: Si $T_0=0\rightarrow$ La estructura es infinitamente rígida

$\Rightarrow$ El desplazamiento relativo suelo oscilador es nulo

Si $T_0=\infty\rightarrow$ La estructura es muy flexible. El desplazamiento relativo oscilador base es igual al desplazamiento de la base $T=\infty\Rightarrow Sd\rightarrow|v_{g\max}|$

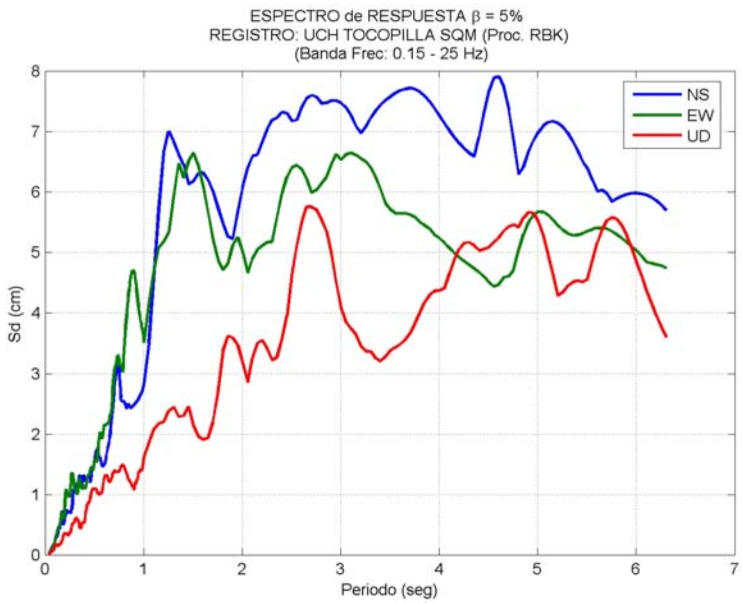


Figura 12.8

12.3. ESPECTRO DE VELOCIDADES RELATIVAS

Sabemos:

$$v(t) = \frac{-1}{\omega_d}\int_0^t \ddot{v}_g(t)\exp(-\beta\omega(t-\tau))sen(\omega_d(t-\tau))d\tau$$

Recordando que:

$$\phi(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} G(t,\tau)d\tau$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{dG(t,\tau)}{dt}d\tau + G(t,b(t))\frac{db}{dt} - G(t,a(t))\frac{da}{dt}$$

$$\dot{v}(t) = \frac{\beta\omega_0}{\omega_D}\int_0^t \ddot{v}_g(\tau)\exp(-\beta\omega(t-\tau))sen(\omega_D(t-\tau))d\tau + ...$$

$$+\frac{-\omega_D}{\omega_D}\int_0^t \ddot{v}_g(\tau)\exp(-\beta\omega(t-\tau)\cos(\omega_D(t-\tau))d\tau + ...$$

$$+\ddot{v}_g(t)\exp\left(-\beta\omega(t-t)\right)\underbrace{sen(\omega_d(t-t))}_{0}\frac{dt}{dt}+\ddot{v}_g(0)\exp(-\beta\omega(t-0))sen(\omega_d(t-0))\underbrace{\frac{d0}{dt}}_{0}$$

$$\Rightarrow \dot{v}(t)=\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\int_0^t \ddot{v}_g(\tau)\exp(-\beta\omega(t-\tau))sen(\omega_D(t-\tau))d\tau$$

$$-\int_0^t \ddot{v}_g(\tau)\exp(-\beta\omega(t-\tau))\cos(\omega_D(t-\tau))d\tau$$

Se define: $S_v(T,\beta)=\max\left|\dot{v}(t)\right|$

$$T\rightarrow 0\Rightarrow k\rightarrow\infty\Rightarrow Sv=0$$

$$T\rightarrow\infty\Rightarrow k\rightarrow 0\Rightarrow Sv\rightarrow\left|\dot{v}_{g\max}\right|$$

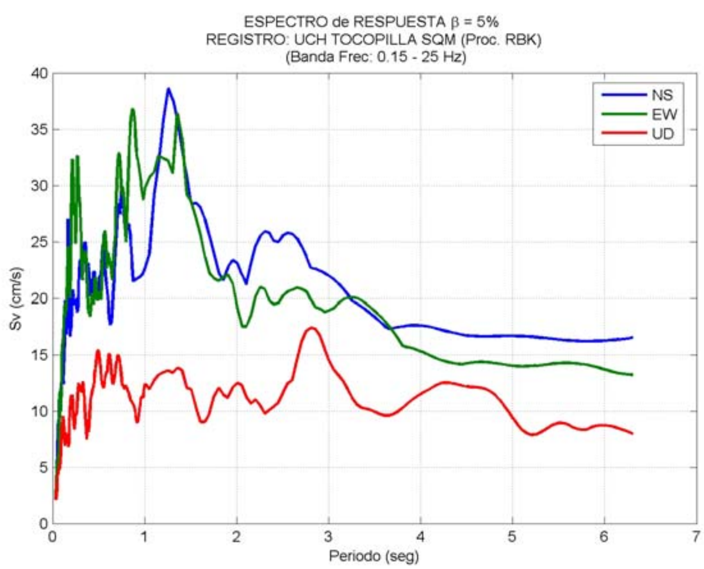


Figura 12.9

12.4. ESPECTRO DE ACELERACIONES ABSOLUTAS

$$\ddot{v}^T=\ddot{v}_g(t)+\ddot{v}(t)$$

La importancia de determinar la aceleración absoluta máxima del sistema radica en que depende de las fuerzas inerciales en el sistema

$$\ddot{v}(t)=\frac{d\dot{v}(t)}{dt}$$

Luego sumar $\ddot{v}_g(t)$ para obtener $\ddot{v}^T(t)$

A partir de la ecuación de movimiento (conocidas $\dot{v}(t)$ y $v(t)$)

$$m\ddot{v}^T(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{v}^T(t) = \frac{-c}{m}\dot{v}(t) - \frac{k}{m}v(t)$$

Conocido $\ddot{v}^T(t)$ por cualquier método

$$Sa(T,\beta) = \max\left|\ddot{v}^T(t)\right|$$

$$T = 0 \Rightarrow k \to \infty \Rightarrow Sa \to PGA$$
$$T \to \infty \Rightarrow Sa \to 0$$

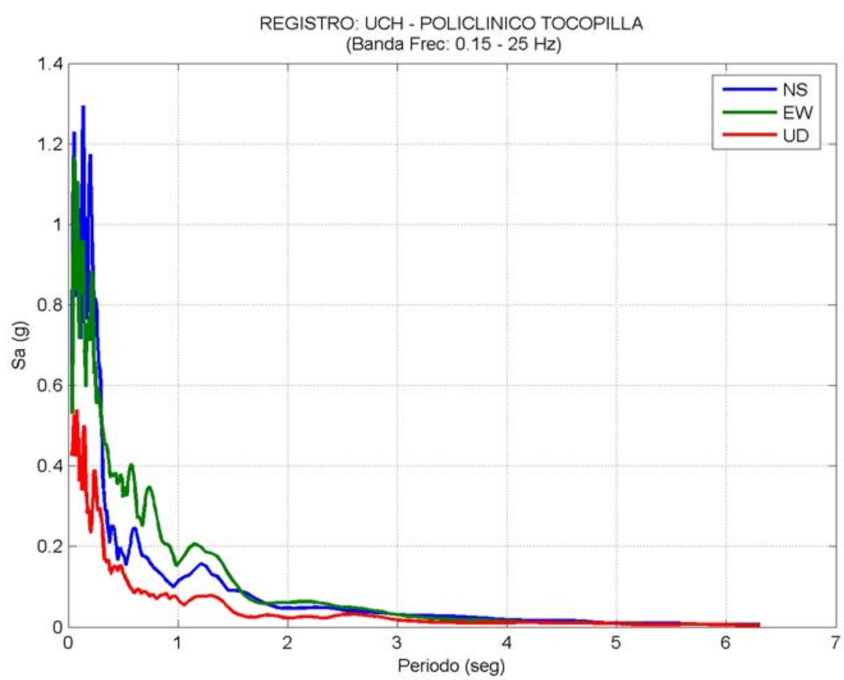
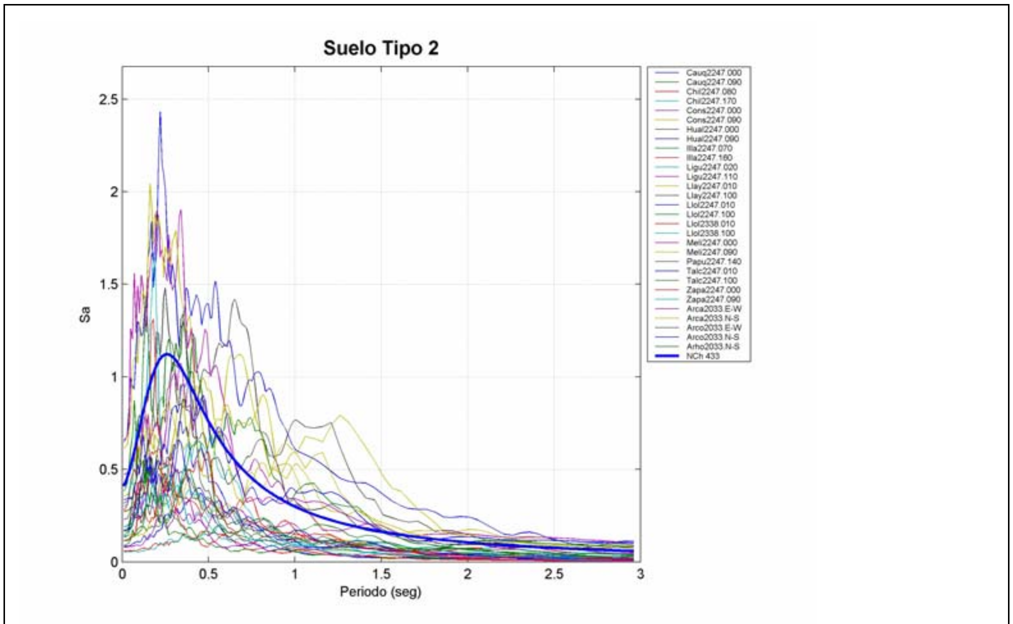
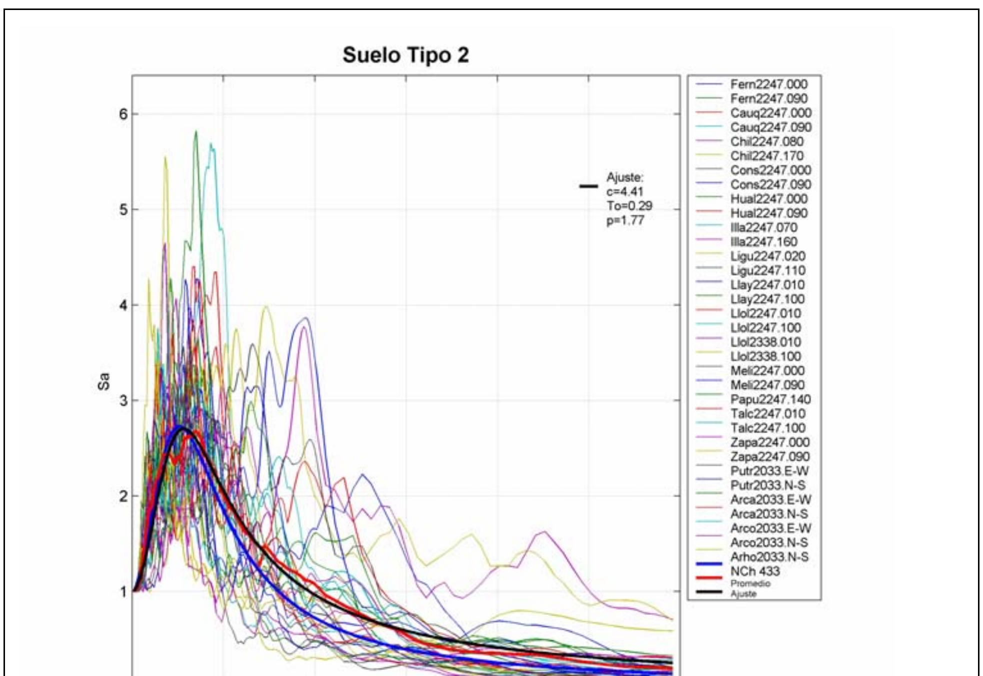
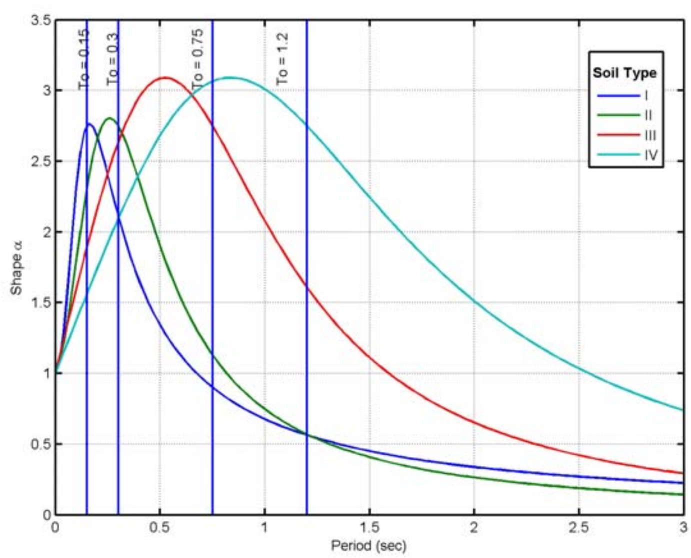


Figura 12.10

12.5. ESPECTRO DE DISEÑO EN CHILE



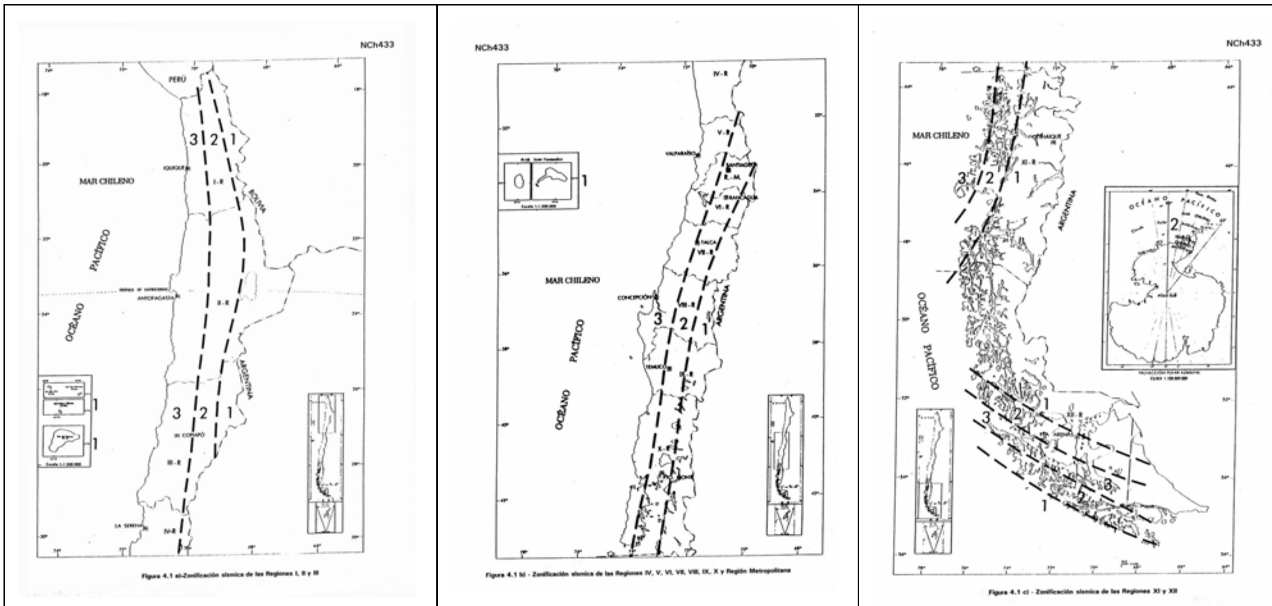




$$Sa(T) = \frac{A_o \alpha I}{R}$$

$$\alpha = \frac{1 + 4.5\left(\frac{T_n}{T_0}\right)^P}{1 + \left(\frac{T_n}{T_0}\right)^3}$$

Figura 12.11

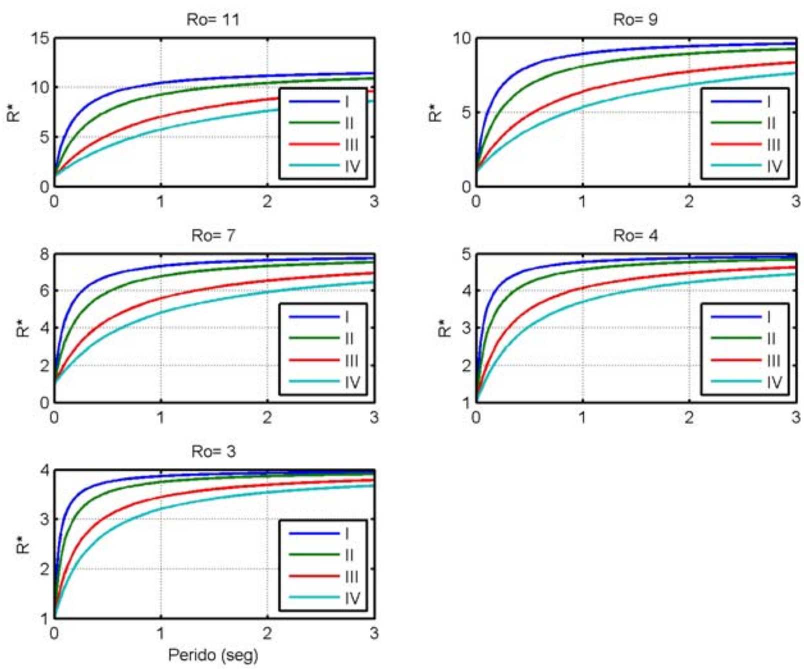


Zona 3: Ao=0.4

Zona 2: Ao=0.3

Zona 1: Ao=0.2

Figura 12.12



12.6. PSEUDO ESPECTROS DE DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD Y ACELERACION

Se define como:

$$Sd(T,\beta) = Sd(T,\beta)$$
$$PSv(T,\beta) = \omega Sd(T,\beta)$$
$$PSa(T,\beta) = \omega^2 Sd(T,\beta)$$
$$PSa(T,\beta) = \omega PSv(T,\beta)$$

12.7. ESPECTRO CUADRILOGARITMICO

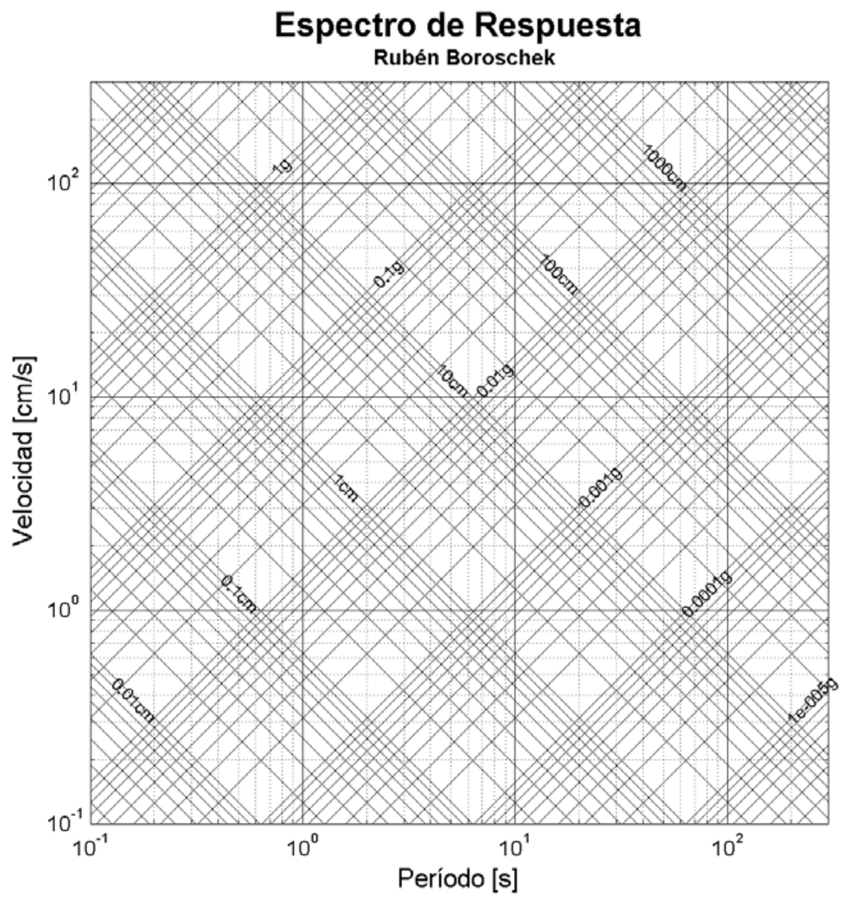
Resume los contenidos de los pseudos espectros de desplazamientos y aceleración

Dado que:

$$PS_d = \frac{T}{2\pi} PS_v \Rightarrow \log(PS_d) = \log(T) - \log(2\pi) + \log(PS_v)$$

Entonces

$$PS_a = \frac{2\pi}{T} PS_v \Rightarrow \log(PS_a) = -\log(T) + \log(2\pi) + \log(PS_v)$$



Ejemplo:

$$T_n = 1\,\text{sec}$$

$$PS_v(Tn,\beta) = 2\pi \; {cm}/{s}$$

Entonces

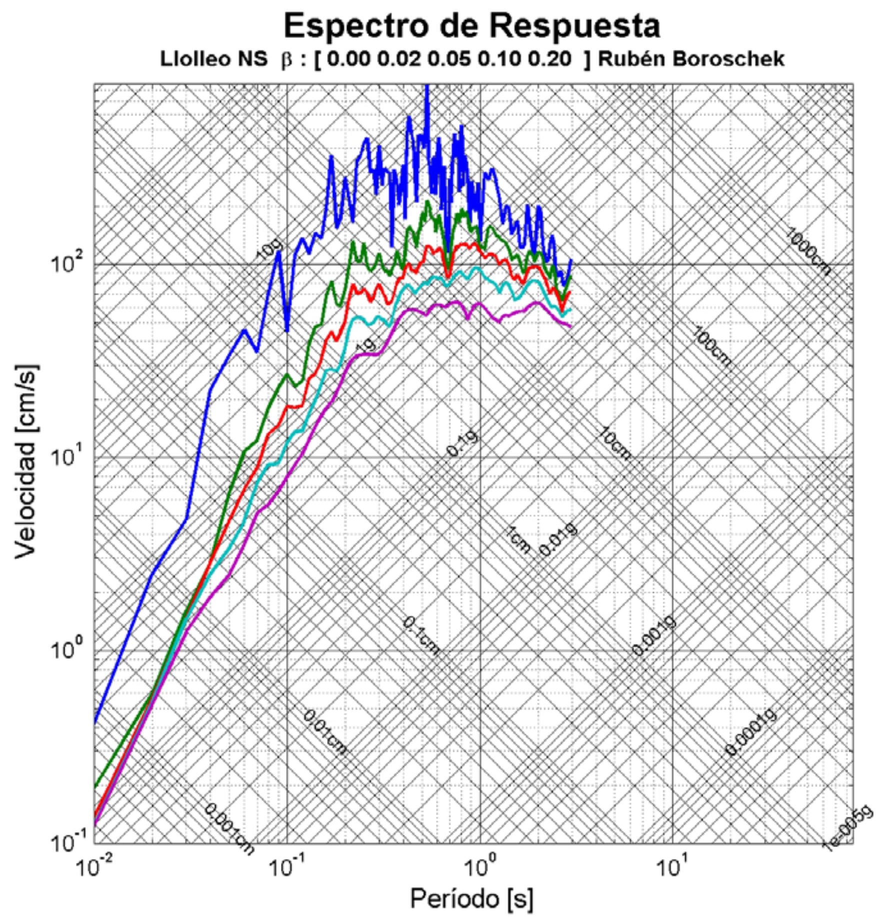
$$\log(PS_d(T_n,\beta)) = \log(1) - \log(2\pi) + \log(2\pi)$$

$$\Rightarrow PS_d(T_n,\beta) = 1\,cm$$

$$\log(PS_a(T_n,\beta)) = \log(2\pi) - \log(T_n) + \log(PS_v(T_n,\beta))$$

$$\log(PS_a) = 2\log(2\pi)$$

$$\Rightarrow PS_a(T_n,\beta) = (2\pi)^2$$

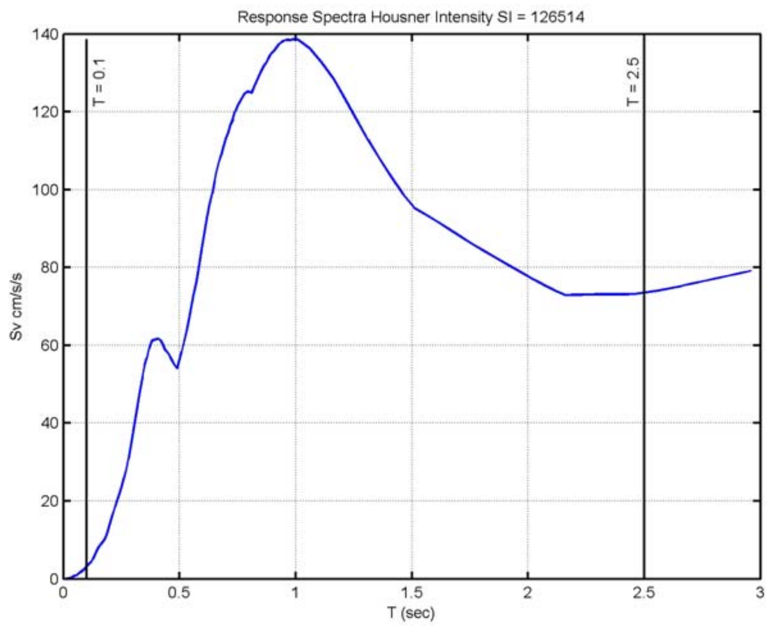


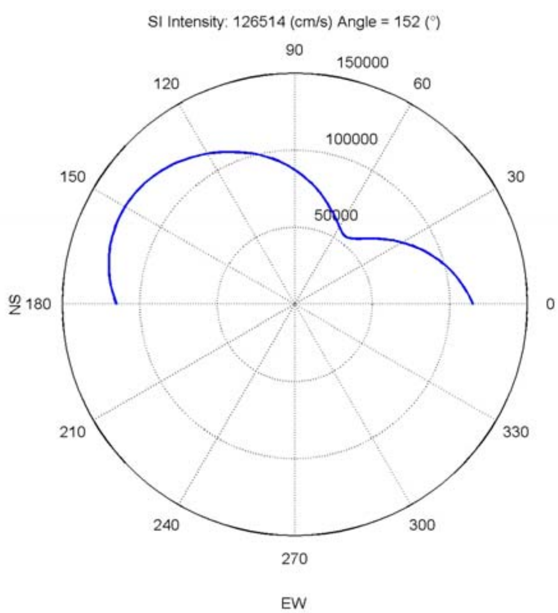
12.8. OTRAS VARIABLES DE RESPUESTA SISMICA

12.8.1. Integral de Housner

Integral de Housner $= SI = \dfrac{1}{2.4}\int_{0.1}^{2.5} Sv(T, \beta = 0.20)dT$

La Banda de Períodos utilizada es la más frecuente en edificios. Muy sensible al amortiguamiento utilizado por tanto se recomienda utilizar 20% de razón de amortiguamiento crítico. Al usar Sv no considera comportamiento inelástico de estructuras.





Kobe EQ. Predominante SI.

12.8.2. Relación entre Energía y Espectro de Fourier

$$v(t)=\frac{1}{\omega_D}\int_0^t \ddot{v}_g(\tau)\exp(-\beta\omega(t-\tau))sen(\omega_D(t-\tau))d\tau$$

$$\beta=0$$

$$v(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t \ddot{v}_g(\tau)sen(\omega(t-\tau))d\tau$$

La energía Total de 1 GDL: $E(t)=\frac{1}{2}kv^2(t)+\frac{1}{2}m\dot{v}^2(t)$

$$=\frac{1}{2}k\left(\frac{1}{\omega}\int_0^t \ddot{v}_g(\tau)sen(\omega(t-\tau))d\tau\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\int_0^t \ddot{v}_g(\tau)\cos(\omega(t-\tau))d\tau\right)^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{E(t)*2}{m}}=\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2}\left(\int_0^t \ddot{v}_g(\tau)sen(\omega(t-\tau))d\tau\right)^2+\left(\int_0^t \ddot{v}_g(\tau)\cos(\omega(t-\tau))d\tau\right)^2}$$

Si desarrollamos $sen(\omega t-\omega\tau)$ y $\cos(\omega t-\omega\tau)$

$$sen(\omega t-\omega\tau)=sen(\omega t)\cos(\omega\tau)-sen(\omega\tau)\cos(\omega t)$$

$$\cos(\omega t-\omega\tau)=\cos(\omega t)\cos(\omega\tau)+sen(\omega t)sen(\omega\tau)$$

Por tanto

$$\cos^2(\omega t-\omega\tau)+sen^2(\omega t-\omega\tau)=\cos^2(\omega t)\cos^2(\omega\tau)+2\cos(\omega t)\cos(\omega\tau)sen(\omega t)sen(\omega\tau)+...$$

$$...+sen^2(\omega t)sen^2(\omega\tau)+sen(\omega t)^2\cos^2(\omega\tau)-2sen(\omega t)\cos(\omega\tau)sen(\omega\tau)\cos(\omega t)+sen^2(\omega\tau)\cos^2(\omega t)=$$

$$=\cos^2(\omega\tau)^2+sen^2(\omega\tau)$$

$$\sqrt{\frac{2E(t)}{m}}=\left[\left(\int_0^t \ddot{v}_g(\tau)\cos(\omega d\tau)\right)^2+\left(\int_0^t \ddot{v}_g(\tau)sen(\omega d\tau)\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\Im\left\{\ddot{v}_g(t)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\ddot{v}_g(t)\exp(-i\omega t)dt=\int_0^{\infty}\ddot{v}_g(t)\exp(-i\omega t)dt$$

$$\exp(-i\omega t)=\cos(\omega t)-isen(\omega t)$$

$$\Rightarrow\quad\Im\left\{\ddot{v}_g(t)\right\}=\int_0^{\infty}\ddot{v}_g(t)\cos(\omega t)dt-i\int_0^{\infty}\ddot{v}_g(t)sen(\omega t)dt$$

$$\left|\Im\left\{\ddot{v}_g(t)\right\}\right| = \left[\left(\int_0^{\infty}\ddot{v}_g(t)\cos(\omega t)dt\right)^2 + \left(\int_0^{\infty}\ddot{v}_g(t)sen(\omega t)dt\right)^2\right]^{1/2}$$

Lo anterior indica que la Transformada de Fourier es una medida de Energía al final del sismo. Máximos en el Espectro son indicadores que gran energía se ha introducido al sistema.

Insertar Figura que compara FFT y SV

Normalmente la energía máxima no ocurre al final del sismo por tanto la transformada de Fourier es menor a Sv.

Notar que la velocidad máxima del sistema se puede estimar a partir de la evolución de la energía.

$E(t_{\max}) = E_{\max}$ por tanto se puede estimar la velocidad máxima posible como

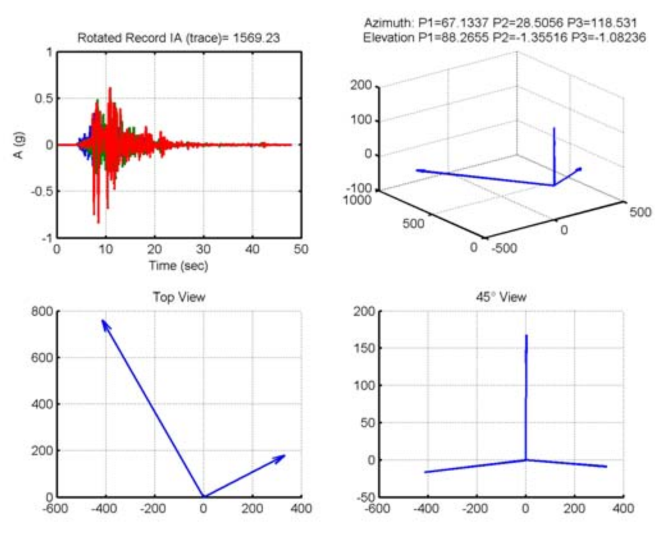
$$E_{\max} = \frac{1}{2}m\dot{v}_{\max}^2$$

$$\dot{v}_{\max} = \sqrt{\frac{2E_{\max}}{m}}$$

12.9. INTENSIDAD DE ARIAS

$$IA = \frac{\pi}{2g}\int_0^t \ddot{v}_g(t)dt$$

Escala de medida de energía



Kobe EQ Arias Intensity.

Rotated Record IA (trace)= 1569.23

I =

543.4058	-228.3716	2.1706
-228.3716	839.0633	-15.5247
2.1706	-15.5247	186.7571

traza =

1.5692e+003

vect =

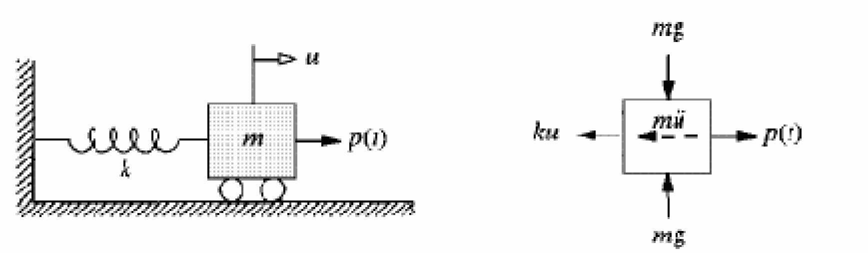
0.0118	0.8785	-0.4776
0.0279	0.4771	0.8784
0.9995	-0.0236	-0.0189

vals =

186.3495	0	0
0	419.3228	0
0	0	963.5540

13. MÉTODO DE RAYLEIGH

13.1. BALANCE DE ENERGÍA



$$v(t) = z_0 sen(\omega t) \quad \dot{v}(t) = z_0 \omega \cos(\omega t)$$

E. cinética $E_k(t) = \frac{1}{2} m \dot{v}(t)^2$ E. potencial $E_p(t) = \frac{1}{2} k v^2(t)$

$$E_p(t) + E_k(t) = E = cte$$

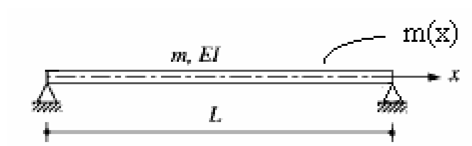
$$\begin{aligned} |E_p| \max &= E \\ |E_k| \max &= E \end{aligned}$$ debe cumplirse pues el máximo de una se encuentra cuando la otra es cero.

$$\rightarrow \frac{1}{2}k|v|^2 = \frac{1}{2}m|\dot{v}|^2 = \frac{1}{2}m\omega^2|v|^2$$

A partir de la energía obtenemos la frecuencia $\Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$

Este método parte de establecer para una estructura la forma de vibrar $\phi(x)$, luego

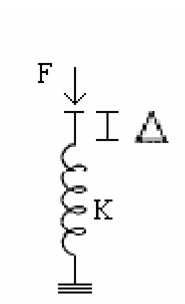
$$v(x,t) = \phi(x)y(t) = \phi(x)z_0 sen(\omega t)$$



$$E_k(t) = \int_0^l \frac{1}{2}m(x)\delta x\left[\frac{\delta^2 v}{\delta t^2}(x,t)\right]^2 = \frac{1}{2}\int_0^l m(x)\left[\phi(x)z_0\omega\cos(\omega t)\right]^2 \delta x$$

$$|E_k| = \frac{1}{2}z_0{}^2\omega^2\int_0^l \phi(x)^2 m(x)\delta x$$

Falta calcular la energía potencia:



$$E_p = \frac{1}{2}k\Delta^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}M\theta = \frac{1}{2}(k_\theta\theta)\theta = \frac{1}{2}k_\theta\theta^2$$

$$E_p = \int_0^l \frac{1}{2}M(x,t)\theta(x,t)\delta x$$

$$M(x,t) = EI(x)\frac{\delta^2 v}{\delta x^2}(x,t)$$

$$E_p = \frac{1}{2}\int_0^l EI(x)\left[\frac{\delta^2 v}{\delta x^2}(x,t)\right]^2 \delta x$$

Reemplazando el $\phi(x)$:

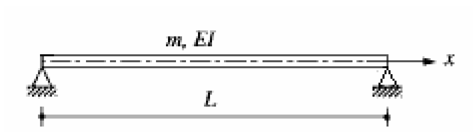
$$\rightarrow E_p = \frac{1}{2}\int_0^l EI(x) z_0^2 sen^2(\omega t)\left[\phi''(x)\right]^2 \delta x$$

$$\rightarrow \left|E_p\right| = \frac{1}{2}\int_0^l EI(x) z_0^2 \left[\phi''(x)\right]^2 \delta x$$

$$\left|E_k\right| = \left|E_p\right|$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{\int_0^l EI(x)\left[\phi''(x)\right]^2 \delta x}{\int_0^l m(x)\left[\phi(x)\right]^2 \delta x} = \frac{k*}{m*}$$

Ejemplo: viga simplemente apoyada.



Construimos ϕ como una parábola talque cumpla las condiciones de borde en los apoyos.

$$\phi(x) = \left(\frac{x}{L}\right)\left(1-\frac{x}{L}\right) = \frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}$$

$$\rightarrow \phi''(x) = -\frac{2}{L^2} = cte$$

$$\omega^2 = \frac{120EI}{mL^4}$$

$$EI\phi(x) = M = cte$$

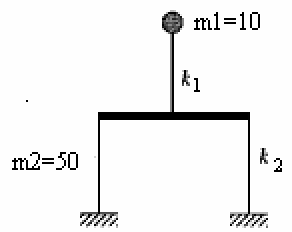
$\rightarrow$ No puede ser.

Veamos ϕ como una sinusoide.

$$\phi(x) = sen(\frac{\pi x}{L})$$

$$\phi''(x) = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) \qquad \omega^2 = 97.4\frac{EI}{mL^2}$$

La frecuencia menos es la que mas se acerca a la forma de vibrar real.

	$k_1 = 375$ $k_2 = 192$

Nos damos un $[\phi_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.9 \end{bmatrix}$ como primer modo.

Energía Cinética

$$|E_k| = \frac{1}{2}\sum m_i |\dot{v}_i|^2 = \frac{1}{2}\sum m_i \omega^2 |v_i|^2$$

$$\rightarrow = \frac{1}{2} z_0{}^2 \sum m_i \{\phi_i\} \omega^2$$

$$\rightarrow = \frac{1}{2} z_0 \omega^2 \left[\left(50 * 0.9^2\right) + 10 * 1^2 \right] = \frac{50.5}{2} z_0^2 \omega^2 * 1000$$

Energía Potencial.

$$[E_v] = \frac{1}{2}\left[\sum k_{piso\, i} \left(|v_i - v_{i-1}|\right)^2\right]$$

$$\rightarrow = \frac{1}{2} z_0^2 \sum k_{piso\, i} \left(\phi_i - \phi_{i-1}\right)^2$$

$$\rightarrow = \frac{1}{2} z_0^2 \left[3750\left(1-0.9\right)^2 + 1920\left(0.9\right)^2\right] * 1000$$

$$\rightarrow = \frac{1}{2} z_0^2 1592.7 * 10^3$$

Luego

$$\omega^2 = \frac{1592.7}{50.5} = 31.54$$

$\omega = 5.6$ rad/seg (para el primer modo)

13.2. COORDENADAS GENERALIZADAS

Generamos la ecuación de equilibrio dinámico a partir de una forma de vibrar mediante Desplazamientos Virtuales δv

Ecuación de trabajo:

$$\delta W = F_I \delta v + F_D \delta v + F_E \delta v = 0$$

$$-\int_0^L m(x)\ddot{z}(t)\phi(x)\delta v dx - \sum_{n=1}^{N} M_n \ddot{z}(t)\phi(x_n)\delta v - \sum_{n=1}^{N} I_{0n}\ddot{z}(t)\phi'(x_n)\delta v' + \ldots$$

$$-\int_0^L EI(x)z(t)\phi''(x)\delta\overline{v}'' dx - \int_0^L k(x)z(t)\phi(x)dx\delta v - \sum_{n=1}^{N} k_n \phi(x_n)z(t) + \ldots$$

$$-\int_0^L c(x)\dot{z}(t)\phi(x)\delta v dx - \sum_{n=1}^{N} c_n \phi(x_n)\dot{z}(t)\delta v + \int_0^L p(x)\delta v dx = 0$$

Agrupando por variable de movimiento:

$$-\ddot{z}(t)\left[\int_0^L m(x)\phi(x)\phi(x)\delta z dx + \sum_{n=1}^{N} M_n \phi(x_n)\phi(x_n)\delta z + \sum_{n=1}^{N} I_{0n}\phi'(x_n)\phi'(x_n)\delta z\right] + \ldots$$

$$-z(t)\left[\int_0^L EI(x)\phi''(x)\phi''(x)\delta z dx - \int_0^L k(x)\phi(x)\phi(x)dx\delta z - \sum_{n=1}^{N} k_n \phi(x_n)\phi(x_n)\delta z\right] + \ldots$$

$$-\dot{z}(t)\left[+\int_0^L c(x)\phi(x)^2 dx\delta z + \sum_{n=1}^{N} c_n \phi(x_n)\phi(x_n)\delta z\right] = -\int_0^L p\phi(x)\delta z dx$$

Así

$$m^*\ddot{z}(t) + c^*\dot{z}(t) + k^* z(t) = p^*(t)$$

Donde en general

$$m^* = \int_0^L m(x)\left[\phi(x)\right]^2 dx + \sum_{n=i}^{N} M_n \phi(x_n)^2 + \sum_{n=1}^{N} I_{0n}\left[\phi_{in}(x)'\right]^2$$

$$c^* = \int_0^L c(x)\left[\phi(x)\right]^2 dx + \sum_{n=1}^{N} c_n\left[\phi(x_n)\right]^2$$

$$k^* = \int_0^L k(x)\left[\phi(x)\right]^2 dx + \int_0^L EI(x)\left[\phi''\right]^2 dx + \sum_{n=1}^{N} k_n\left[\phi(x_n)\right]^2$$

$$p^*(t) = \int_0^L p(x,t)\phi(x)dx + \sum_{n=1}^{N} p(x_n)\phi(x_n)$$

Y $\omega^2 = \dfrac{k^*}{m^*}$

14. SISTEMA DE N GDL

Siempre trabajamos con los GDL dinámicos, si tenemos exceso de estáticos, debemos condensar hasta tener solo los dinámicos.

Para NGD, se tiene que en el equilibrio de fuerzas:

$$\{f_I(t)\}_{nx1} + \{f_D(t)\}_{nx1} + \{f_E(t)\}_{nx1} = \{P(t)\}$$

Donde la s fuerzas elásticas, de inercia y disipación, se definen como:

$$\{f_E(t)\}_{nx1} = [K]_{nxn}\{v(t)\}_{nx1}$$

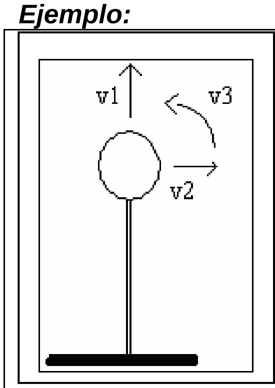
$$\{f_I(t)\} = [M]_{nxn}\{\ddot{v}(t)\}_{nx1}$$

$$\{f_D(t)\}_{nx1} = [C]_{nxn}\{\dot{v}(t)\}_{nxn}$$

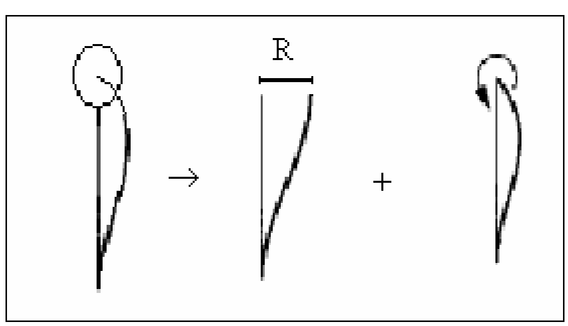
14.1.1. Fuerza Elástica

Uno de los primeros pasos para resolver esto, es el cálculo de la matriz de rigidez, identificar los grados de libertad del sistema la matriz de masa, para esta última debemos poner preferentemente los GDL en el centro de masa.

Ejemplo:

	$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} + \frac{12EI\,R}{L^3} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} + \frac{12EI\,R}{L^3} & \frac{6EIR}{L^2} + \frac{4EI}{L} + R\left(\frac{12EIR}{L^2} + \frac{6EI}{L^2}\right) \end{bmatrix}$

Para K_{33}: si giro 1, se tiene



14.1.2. Fuerza Inercial

$$[M]=\begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 \\ 0 & m_0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix}$$

Cuando escogemos GDL en el centro de masa, la matriz es diagonal, lo que facilita enormemente los cálculos.

14.1.3. Disipación

$$\{f_D(t)\}_{nx1}=[C]_{nxn}\{\dot{v}(t)\}_{nx1}$$

En general no calculamos C dado que normalmente el disipador no existe.

14.2. RELACIONES BÁSICAS: RIGIDEZ, FLEXIBILIDAD Y TRABAJO

14.2.1. Condensación Estática

$$[K]\{v(t)\}=\{F_E(t)\}$$

$$\begin{bmatrix} [K_{00}] & [K_{01}] \\ [K_{10}] & [K_{11}] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \{v_0(t)\} \\ \{v_1(t)\} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_0(t) \\ F_1(t)=0 \end{Bmatrix}$$

$$[K_{10}]\{v_0(t)\}+[K_{11}]\{v_1(t)\}=\{F_1(t)\}=\{0\}$$

$$\{v_1(t)\}=-[K_{11}]^{-1}[K_{10}]\{v_0(t)\}$$

$$[K_{00}]\{v_0(t)\}-[K_{01}][K_{11}]^{-1}[K_{10}]\{v_0(t)\}=\{F_0(t)\}$$

$$\left\{[K_{00}]-[K_{01}][K_{11}]^{-1}[K_{10}]\right\}\{v_0(t)\}=\{F_0(t)\}$$

$$\{v(t)\}=[T]\{v_0(t)\}=\begin{bmatrix} [I] \\ -[K_{11}]^{-1}[K_{10}] \end{bmatrix}\{v_0(t)\}$$

$$[\tilde{K}]=[T]^T_{nxn}[K]_{nxn}[T]_{nxn}$$

$[T]$, no depende del tiempo, entonces:

$$\{v(t)\}=[T]\{v_0(t)\}$$
$$\{\dot{v}(t)\}=[T]\{\dot{v}_0(t)\}$$
$$\{\ddot{v}(t)\}=[T]\{\ddot{v}_0(t)\}$$

$$\left[\tilde{C}\right]=[T]^T[C][T]$$

$$\left[\tilde{M}\right]=[T]^T[M][T]$$

14.2.2. Trabajo y Energía de Deformación

Matriz de flexibilidad

$$v_1 = f_{11}p_1 + f_{12}p_2 \ldots f_{1n}p_n$$

$$\{v\}=[F]\{P\}$$

Rigidez $\{P\}=[K]\{v\}$

Energía de deformación. (V)

$$V=\frac{1}{2}\sum_i^N P_i\cdot v_i=\frac{1}{2}\{P\}^T\{v\}$$

Utilizando flexibilidad

$$V=\frac{1}{2}\{P\}^T[F]\{P\}$$

De manera alternativa utilizando matriz de rigidez

$$V=\frac{1}{2}\{P\}^T\{v\}=\frac{1}{2}\{v\}^T[K]\{v\}$$

Como la energía de deformación es positiva

$$\{v^T\}[K]\{v\}>0$$

$$\{P\}^T[F]\{P\}>0$$

Por tanto para v y P arbitrario [K],[F] son positiva definidas no singulares o invertibles. Entonces

$$\{v\}=[F]\{P\}$$

$$\{P\}=[K]\{v\}$$

$$[K]^{-1}\{P\}=[K]^{-1}[K]\{v\}$$

$$[K]^{-1}\{P\}=\{v\}$$

$$\Rightarrow \boxed{[K]^{-1}=[F]}$$

14.2.3. Ley de Betti

Tenemos dos sistemas de cargas 1 y 2 sobre un cuerpo

Trabajo de Carga 1 a través de desplazamientos 1. $W_{11} = \frac{1}{2}\{P_1\}^T \{v_{11}\}$

Luego se aplica carga 2 lo que genera un trabajo adicional de: $W_{22} + W_{12} = \frac{1}{2}\{P_2\}^T \{v_{22}\} + \{P_1\}^T \{v_{12}\}$

El trabajo total es: $W_{Total} = W_{11} + W_{22} + W_{12} = \frac{1}{2}\{P_1\}^T \{v_{11}\} + \frac{1}{2}\{P_2\}^T \{v_{22}\} + \{P_1\}^T \{v_{12}\}$

Si aplicamos en orden inverso:

Carga 2: $W_{22} = \frac{1}{2}\{P_2\}^T \{v_{22}\}$

Trabajo Adicional $W_{11} + W_{21} = \frac{1}{2}\{P_1\}^T \{v_{11}\} + \{P_2\}^T \{v_{21}\}$

Trabajo Total: $W_{Total} = W_{11} + W_{22} + W_{21} = \frac{1}{2}\{P_2\}^T \{v_2\} + \frac{1}{2}\{P_1\}^T \{v_{11}\} + \{P_2\}^T \{v_{21}\}$

Debido a que la energía de deformación es independiente de la aplicación a la carga

$$\{P_1\}^T \{v_{12}\} = \{P_2\}^T \{v_{21}\}$$

"El trabajo hecho por un grupo de fuerzas debido a las deformaciones de un segundo grupo de fuerza es igual al trabajo hecho por el segundo grupo de fuerza debido a las deformaciones del primer grupo"

14.2.4. Ecuación de Equilibrio Dinámico

Luego la ecuación característica de equilibrio, para un sistema de NGD es:

$$[M]\{\ddot{v}(t)\} + [C]\{\dot{v}(t)\} + [K]\{v(t)\} = \{P(t)\}$$

Solución a la ecuación:

Primero resolvemos para [C] = 0

Problema homogéneo:

Donde su solución es conocida:

$$y(t) = y_0(t) sen(\omega t)$$

$$[v(t)]_{nx1} = \{\phi\}_{nx1}\, y(t) = \{\phi\}\, y_0(t) sen(\omega t)$$

$$\{\ddot{v}(t)\} = -\omega^2 \{\phi\}\, y_0 sen(\omega t)$$

Si reemplazo la solución.

$$\left[[K]_{nxn} - \omega^2 [M]_{nxn}\right]\{\phi\}_{nx1} = \{0\}_{nx1}$$

$$\det\left[[K]-\omega^2[M]\right]=0$$

De esta ecuación se obtiene ω_i (Valores propios.), los que representan las frecuencias de cada modo.

Problemas de valores propios

n soluciones.

n frecuencias.

n valores propios.

Ejemplo

m = $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ k = $\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}$ phi = $\begin{bmatrix}-0.7071 & -0.7071\\ -0.5000 & +0.5000\end{bmatrix}$ ω^2 = $\begin{bmatrix}0.5858 & 0\\ 0 & 3.4142\end{bmatrix}$

polcaract = [1 -4 2]

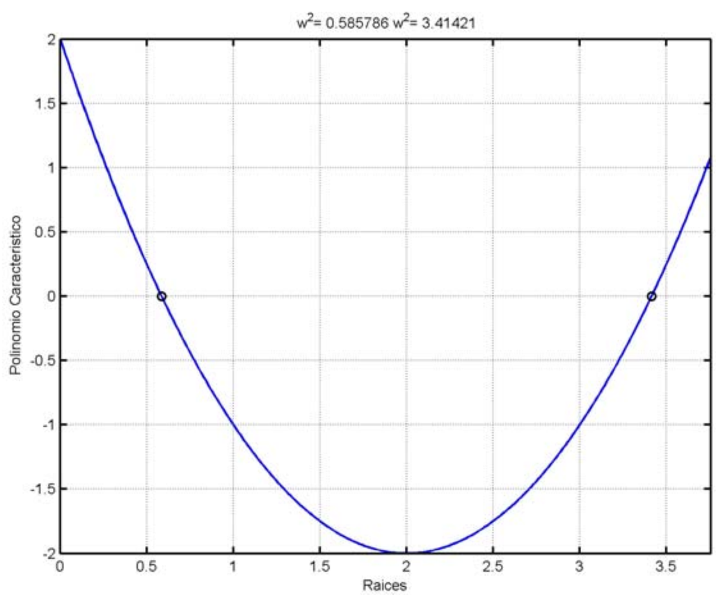


Figura 14.1

NGDL= 5

m = 2

k = 3

beta = 0.0500

polcaract =1.0000 -13.5000 63.0000 -118.1250 75.9375 -7.5938 phi =

0.4221	0.3879	0.3223	-0.2305	0.1201
0.3879	0.1201	-0.2305	0.4221	-0.3223
0.3223	-0.2305	-0.3879	-0.1201	0.4221
0.2305	-0.4221	0.1201	-0.3223	-0.3879
0.1201	-0.3223	0.4221	0.3879	0.2305

w2 =

0.1215	0	0	0	0
0	1.0354	0	0	0
0	0	2.5731	0	0
0	0	0	4.2462	0
0	0	0	0	5.5238

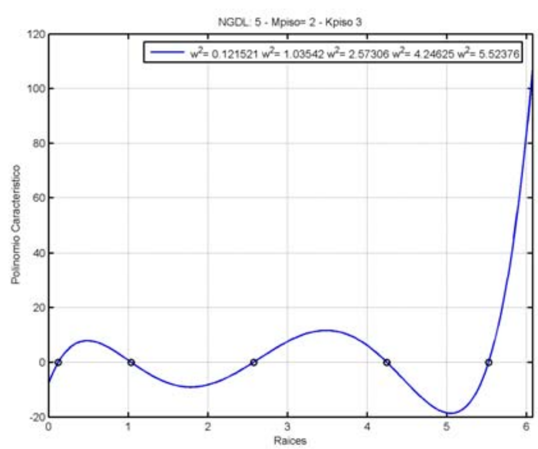


Figura 14.2

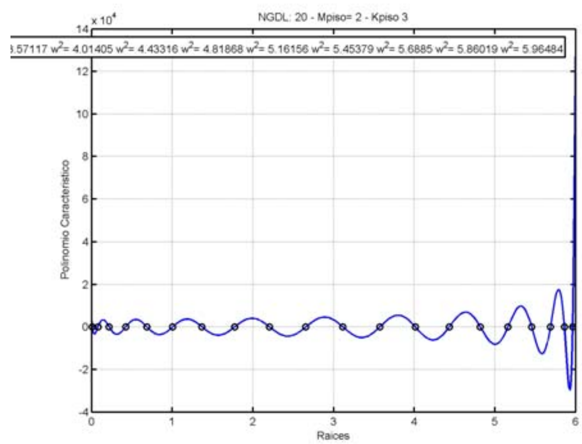


Figura 14.3

14.3. FORMULACION DE VALORES PROPIOS CON FLEXIBILIDAD

$$\left[[\underline{K}]-\omega^2[\underline{M}]\right]\{\phi\}=0$$

$$[K]^{-1}\left[[\underline{K}]-\omega^2[\underline{M}]\right]\{\phi\}=0$$

$$\left[\underset{nxn}{[I]}-\omega^2[F][M]\right]\{\phi\}=0$$

$$\left[\frac{1}{\omega^2}[I]-[F][M]\right]\{\phi\}=0$$

No es un problema simétrico por tanto es mas difícil de resolver y converge a los valores mayores.

14.4. PROPIEDADES DE ORTOGONALIDAD DE MODOS

$$\left[[K]-\omega_i^2[M]\right]\{\phi_i\}=\{0\}$$

$$\omega_i^2[M]\{\phi_i\}=[K]\{\phi_i\}$$

Trasponiendo

=> $\omega_i^2\{\phi_i\}^T[M]=\{\phi_i\}^T[K]$ //Matriz $[M]$ y $[K]$simétricas.//Multiplicando por $\{\phi_j\}$

=> $\omega_i^2\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_j\}=\{\phi_i\}^T[K]\{\phi_j\}$

Consideremos la ecuación para el modo j

$\omega_j^2[M]\{\phi_j\}=[K]\{\phi_j\}$ // pre-multiplicando por $\{\phi_i\}^T$

=> $\omega_j^2\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_j\}=\{\phi_i\}^T[K]\{\phi_j\}$ (2)

Restando (2) – (1)

$$\omega_j^2\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_j\}-\omega_i^2\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_j\}=0.$$

$$\left(\omega_j^2-\omega_i^2\right)\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_j\}=0$$

si i $\neq$ j => $\omega_i \neq \omega_j$.

=> $\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_j\}=0$ (3) Ortogonalidad de modos respecto a la matriz de masa [M].

Introduciendo (3) en (1)

$\{\phi_i\}^T[K]\{\phi_j\}=0$ si i$\neq$j Ortogonalidad de modos respecto a la matriz de rigidez [K].

Consideremos: $[K]\{\phi_j\}=\{f_j\}$

=> $\{\phi_i\}^T\{f_j\}=0$ El Trabajo de las “fuerzas” que producen deformación del modo {ф}j por los desplazamientos del otro modo {ф}i, es nulo.

$\{\phi_i\}^T[K]\{\phi_j\}=\left\langle\begin{matrix}k_i\rightarrow i=j\\ 0\rightarrow i\neq J\end{matrix}\right.$ k_i Rigidez modal

$\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_j\}=\left\langle\begin{matrix}m_i\rightarrow i=j\\ 0\rightarrow i\neq j\end{matrix}\right.$ m_i Masa modal

14.4.1. Condiciones Adicionales de Ortogonalidad

Por ley de Betti

$$\{F_{I1}\}^T\{v_2\}=\{F_{I2}\}^T\{v_1\}$$

En general

$$\{F_{In}\}^T\{v_m\}=\{F_{Im}\}^T\{v_n\}$$

Pero

$$[K]\{v_n\}-\underbrace{\omega^2[M]\{v_n\}}_{F_{in}}=0$$

$$\{F_{In}\}^T=\omega_n^2[M]\{v_n\}$$

Entonces

$$\omega_r^2\bar{\hat{v}}_r^T[\underline{m}]\bar{v}_m=\underbrace{\omega_m^2\hat{v}_m^T[\underline{m}]\{v_n\}}_{\substack{escalar\\ se\ pue\ trasponer}}=\omega_m^2\{v_n\}^T[\bar{m}]\bar{\hat{v}}[\underline{m}]$$

Parámetro al otro lado

$$\left(w_n^2-w^2[m]\right)\hat{v}_m^T[\underline{m}]\hat{v}[m]=0$$

$$w_r\neq w[m]\Rightarrow\hat{v}_n^T[\underline{m}]\hat{v}[m]\quad o\ \underline{\phi}_n^T[\underline{m}]\phi_m=0$$

$$de\,igual\,manera\,si\,multiplicamos\,por\,\frac{1}{w_n^2}\phi_m^T[\underline{m}]\underline{F}$$

$$\frac{1}{w_n^2}\phi^T[m][\underline{m}]\underline{F}\underline{K}\phi n=\frac{w_n^2}{w_n^2}\phi^T[m][\underline{m}]\underline{F}[m]\phi n$$

$$\boxed{\phi^T[m][m]F[m]\phi n=0}$$

$$y:\ \boxed{\phi^T[m][m]F[m]F[m]\phi n=0}$$

Estas dos familias de propiedades ortogonales se pueden presentar mediante

$$\phi_m^T[m]\left[[m]^{-1}[K]\right]^b\phi_n=0\qquad -\sim<b<\infty$$

$$b=0$$

$$\phi_m^T[m]\phi_n=0$$

$$b=1$$

$$\phi_m^T[K]\phi_n=0$$

$$b = 2 \qquad \phi_m^T [m][m]^{-1} K [m]^{-1} [K] \phi = 0$$
$$\phi_m^T K [m]^{-1} [K] \phi = 0$$

$$b = {}^{-}2 \; \phi_m^T [m]\left[\left[K^{-1}\right][m]\right]\left[\left[K^{-1}\right][m]\right]\phi_n = 0$$

Adicionalmente

Si $[\underline{K}]\phi n - \omega_n^2 [\underline{m}]\phi n = 0$

ϕ_m^T

Multiplicado por $\phi_m^T [K]\phi_m - \omega_n^2 \phi_m^T [m]\phi_n = 0$

$$= 0 si [m] \neq [m]$$

$$\Rightarrow \phi_m^T [K]\phi_m = 0$$
$$si \; [m] \neq n$$

Otras relaciones

Si $[K]\phi n = \omega_n^2 [m]\phi_n$

y premultiplicamos por $\phi_m^T Km^{-1}$

$$\phi_m^T K [m]^{-1} K\phi_n = \omega_n^2 \phi_m^T K \{m\}^{-1} [m]\phi_n = 0$$
$$\phi_m^T K [m]^{-1} K\phi_n = 0$$

Premultiplicamos por $\phi_m^T K [m]^{-1} K [m]^{-1}$

$$\phi_m^T K [m]^{-1} K [m]^{-1} K\phi n = \omega_n^2 \phi_m^T K [m]^{-1} K\phi n$$
$$\phi_m^T K [m]^{-1} K [m]^{-1} \phi n = 0$$

14.5. NORMALIZACIÓN MODAL

$$\{\phi_i\}^T [M]\{\phi_j\} = \{\phi_i\}^T [M]\{\phi_i\} = \sum_{j=1}^{n} m_j \phi_{ji}^2$$

Si normalizamos los modos talque:

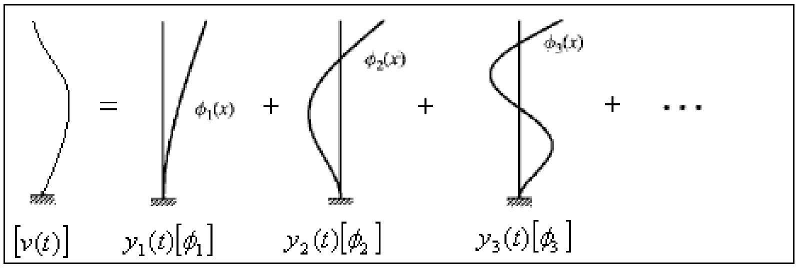
$$\{\phi'_i\} = \frac{\{\phi_i\}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} m_j \phi_{ji}^2}}$$

=> $\{\phi'_i\}[M]\{\phi'_i\} = 1$

=> $\omega_i^2 \{\phi'_i\}[M]\{\phi'_i\} = \{\phi'_i\}^T [K]\{\phi'_i\}^T$

=> $\omega_i^2 = \{\phi'_i\}^T [K]\{\phi'_i\}^T$

14.6. COORDENADAS MODALES



La respuesta de una estructura de puede ver como una combinación de todas sus formas de vibrar.

$$\{v(t)\} = \sum_{i=1}^{n} y_i(t)\{\phi_i\}$$

$$\{v(t)\} = y_1(t)\{\phi_1\} + ... + y_i(t)\{\phi_i\} + ...$$

$$\{\phi_i\}^T [M]\{v(t)\} = \{\phi_i\}^T [M] y_1(t)\{\phi_1\} + ... + \{\phi_i\}^T [M] y_i(t)\{\phi_i\} + ...$$

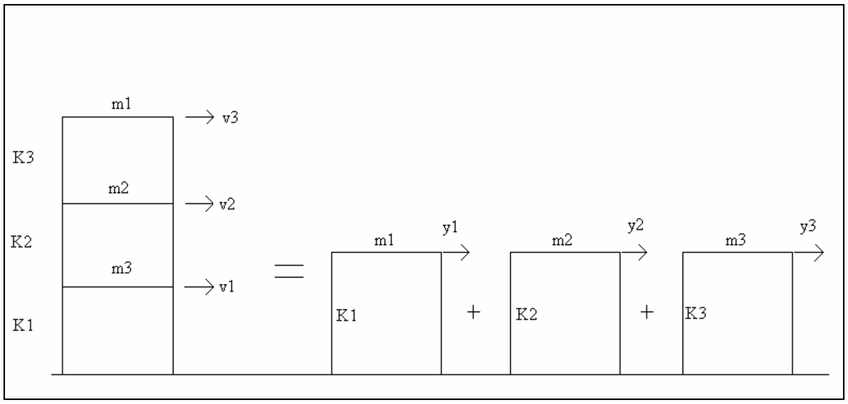
Donde por ortogonalidad todos los términos son = 0, menos $\{\phi_i\}^T [M] y_i(t)\{\phi_i\}$

$\{\phi_i\}^T [M]\{v(t)\} = M_i y_i(t)$ //M_i masa modal

Luego

$$y_i(t) = \frac{\{\phi_i\}^T [M]\{v(t)\}}{M_i} \qquad \dot{y}_i(t) = \frac{\{\phi_i\}^T [M][\dot{v}(t)]}{M_i}$$

14.7. ¿COMO RESOLVEMOS?



$$\{v(t)\} = \sum_{i=1}^{n} y_i(t)\{\phi_i\}$$

$$\begin{Bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{Bmatrix} = \{\phi_1\} y_1(t) + \{\phi_2\} y_2 + \{\phi_3\} y_3(t)$$

Encontrar

$$[M]\{\ddot{v}(t)\} + [C]\{\dot{v}(t)\} + [K]\{v(t)\} = [P(t)]$$

Platear problemas de valores propios sin amortiguamiento (la aproximación es muy buena)

$$\big[[K] - \omega_i^2 [M]\big]\{\phi_i\} = \{0\}$$

Encontrar todas las formas modales

$$\{\omega^2\}, [\phi]$$

Obtenemos los parámetros modales

$M_i = \{\phi_i\}^T [M]\{\phi_i\}$ i =1…n $\qquad K_i = \omega_i^2 M_i \qquad P_i(t) = \{\phi_i\}^T [P(t)]$ i = 1…n

Encontramos las condiciones iniciales para cada forma modal.

$$y_i(0) = \frac{\{\phi_i\}^T [M]\{v(0)\}}{M_i} \quad ; \quad \dot{y}_i(0) = \frac{\{\phi_i\}^T [M]\{\dot{v}(0)\}}{M_i}$$

Por ahora asumimos que conocemos β_i i =1…n y que $\{\phi_i\}^T [C]\{\phi_i\} = C_i$

$$\{\phi_i\}^T [M]\{\phi_i\}\ddot{y}_i(t) + \{\phi_i\}^T [C]\{\phi_i\}\dot{y}_i(t) + \{\phi_i\}^T [K]\{\phi_i\} y_i(t) = \{\phi_i\}^T P_i(t)$$

$$M_i\ddot{y}_i(t) + C_i\dot{y}_i(t) + K_i\, y_i(t) = P_i(t)$$

$\ddot{y}_i(t) + 2\omega_i\beta_i\dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = P_i(t)/M_i$ i = 1…n

Encontramos las solución: $\ddot{y}_i(t)$, $\dot{y}_i(t)$, $y_i(t)$ y la respuesta final del sistema.

$$\{v(t)\} = \sum y_i(t)\{\phi_i\} \quad \{\dot{v}(t)\} = \sum \dot{y}_i(t)\{\phi_i\} \quad \{\ddot{v}(t)\} = \sum \ddot{y}_i(t)\{\phi_i\}$$

La fuerzas elásticas

$$\{f_E(t)\} = [K]\{v(t)\} = \sum\{f_{Ei}(t)\} = \sum[K]\{\phi_i\}\, y_i(t)$$

Dado el problema de valores propios

$$\left[[K] - \omega_i^2[M]\right]\{\phi_i\} = \{0\}$$

$$[K]\{\phi_i\} = \omega_i^2[M]\{\phi_i\}$$

$$\{f_E(t)\} = \sum \omega_i^2[M]\{\phi_i\}\, y_i(t) = [M]\sum \omega_i^2\{\phi_i\}\, y_i(t)$$

El cortante basal

$$\{1\}^T\{f_E(t)\} = \sum \omega_i^2 \{1\}^T[M]\{\phi_i\}\, y_i(t) = \sum \omega_i^2 L_i y_i(t)$$

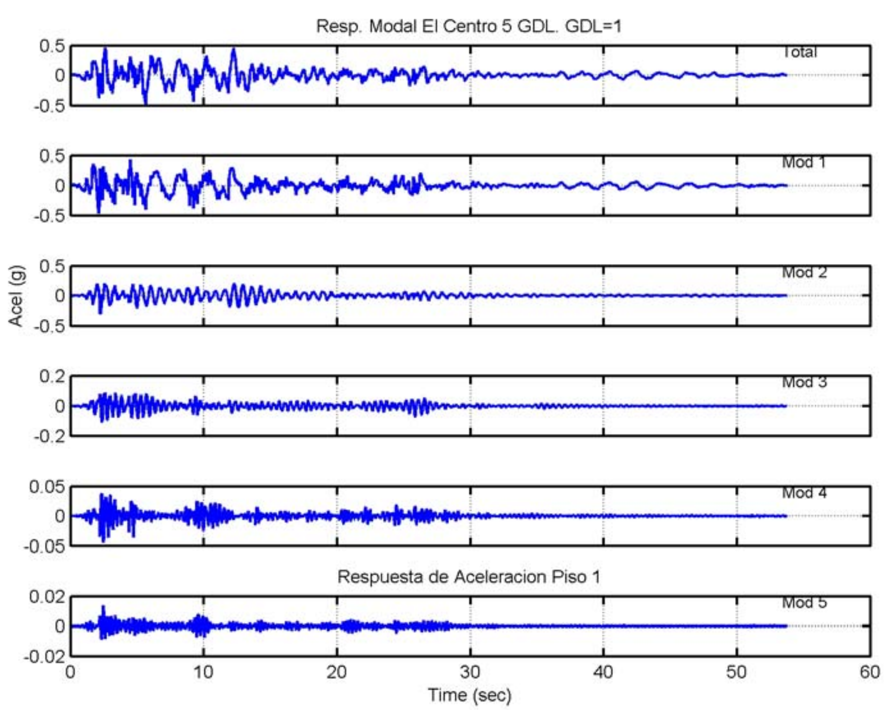


Figura 14.4 Contribución Modal a Respuesta Total de un GDL

`dinaRespSismoNGDLModal  NGDL=5; m=100 k=12183`

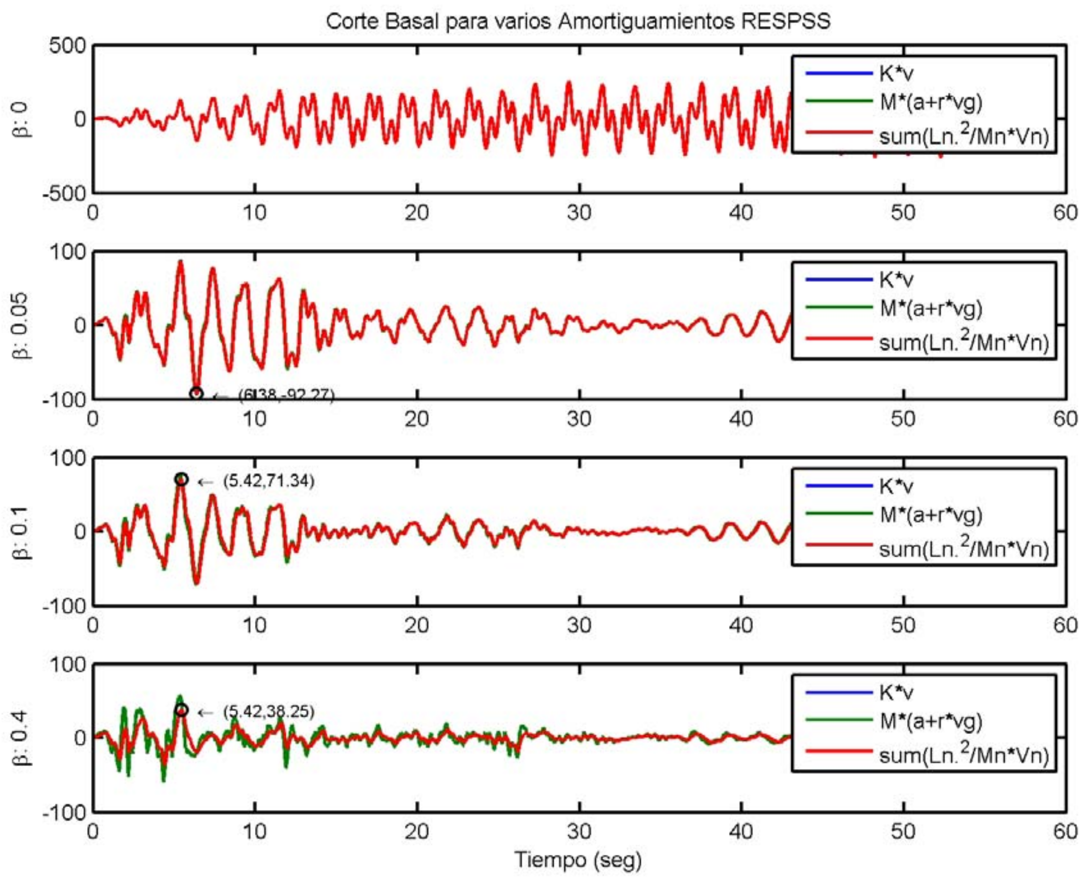


Figura 14.5 Efecto del Amortiguamiento en el Cálculo del Corte Basal. Tres formas de Calcular.

```
dinaRespSismoNGDLModal  NGDL=5; m=100 k=12183
```

14.8. ¿COMO CALCULAMOS LA MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO?

Tenemos que desacoplar el problema (usando la ortogonalidad de las formas modales)

$$\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_i\}\ddot{y}_i(t)+\{\phi_i\}^T[C]\{\phi_i\}\dot{y}_i(t)+\{\phi_i\}^T[K]\{\phi_i\}y_i(t)=\{\phi_i\}^T P_i(t)$$

$\{\phi_i\}^T[C]\{\phi_i\}$ es una matriz no necesariamente diagonal ya que no participa en el problema de valores propios. Se puede construir una matriz proporcional de varias maneras.

14.8.1. Amortiguamiento Proporcional de Rayleigh

Decimos que [C] es combinación lineal de [M] y [K].

$$[C]=a[M]+b[K] \qquad \{\phi_j\}^T[C]\{\phi_i\}=\{\phi_j\}^T\{a[M]+b[K]\}\{\phi_i\}$$

$$C_i = \begin{cases} aM_i + bK_i \rightarrow i = j \\ 0 \rightarrow i \neq j \end{cases}$$

$$\frac{1}{2m_i\omega_i} C_i = \beta_i \rightarrow \beta_i = \frac{1}{2\omega_i} a + \frac{b}{2}\omega_i$$

Si asumo dos β_i con los ω_i obtengo las constantes a y b

La matriz de Rayleigh tiene las mismas propiedades de ortogonalidad de [M] y [K], es decir:

$$\{\phi_j\}^T [C]\{\phi_i\} = \left\langle \begin{matrix} C_i \rightarrow i = j \\ 0 \rightarrow i \neq j \end{matrix} \right.$$

$$\beta_i = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\omega_i} a + \omega_i b\right]$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_i \\ \beta_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_i} & \omega_i \\ \frac{1}{\omega_j} & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$$

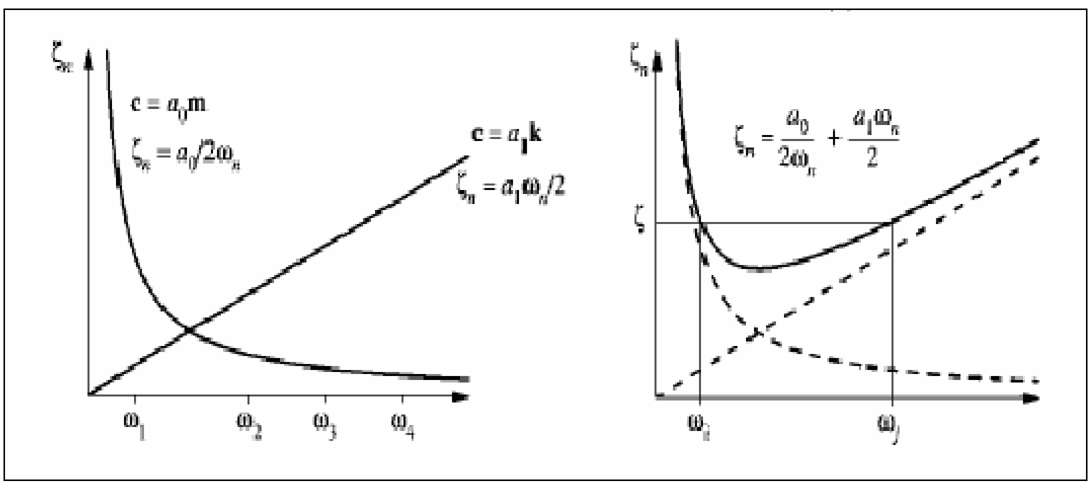


Figura 14.6

14.8.2. Amortiguamiento Proporcional de Caughy

$$[C] = \sum [C_b] = [M] \sum a_b \left[[M]^{-1}[K]\right]^b$$

$$\beta_i = \frac{1}{2\omega_i}\sum_b a_b \omega_i^{2b}$$

Para ajustar con b entero:

2 $\beta \rightarrow b = 0,1$

3 $\beta \rightarrow b = -1,0,1$

4 $\beta \rightarrow b = -2,-1,0,1$ o $-1,0,1,2$

Para el caso de dos valores de amortiguamiento obtenemos el caso de Rayleigh:

$$\beta_1 = \frac{1}{2\omega_1}\sum_{b=0,1} a_b \omega_1^{2b} = \frac{1}{2\omega_1}\left[a_0 + a_1\omega_1^2\right]$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2\omega_2}\left[a_0 + a_1\omega_2^2\right]$$

14.8.3. Amortiguamiento Proporcional de Penzien - Wilson

Si conozco todos los β_i puedo entrar un $[C]$ proporcional

Luego:

$$[\Phi]^T[C][\Phi] = \begin{bmatrix} 2\beta_1\omega_1 M_1 & 0 & 0 \\ 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta_n\omega_n M_n \end{bmatrix} = [\alpha]$$

Luego, se puede calcular [C] como:

$$[C] = \left[[\Phi]^T\right]^{-1}[\alpha][\Phi]^{-1}$$

Pero:

$$[M_i] = [\Phi]^T[M][\Phi]$$

$$[M_i]^{-1} = \left[[\Phi]^T[M][\Phi]\right]^{-1}$$

$$[M_i]^{-1}[M_i] = [I]$$

$$[M_i]^{-1}[\Phi]^T[M][\Phi] = [I]$$

$$[M_i]^{-1}[\Phi]^T[M] = [\Phi]^{-1}$$

En forma similar

$$[M_i][M_i]^{-1} = [I]$$

$$[\Phi]^T [M][\Phi][M_i]^{-1} = [I]$$

$$[M][\Phi][M_i]^{-1} = \left[[\Phi]^T\right]^{-1}$$

Por tanto

$$[C] = \left[[M][\Phi][M_i]^{-1}\right][\alpha]\left[[M_i]^{-1}[\Phi]^T[M]\right]$$

Pero

$$[M_i]^{-1}[\alpha][M_i]^{-1} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \dfrac{2\beta_i\omega_i}{M_i} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \text{ por tanto}$$

$$[C] = [M]\left(\sum_{i=1}^{N}\{\phi_i\}\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \dfrac{2\beta_i\omega_i}{M_i} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}\{\phi_i\}^T\right)[M]$$

$$[C] = [M]\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{2\beta_i\omega_i}{M_i}\{\phi_i\}\{\phi_i\}^T\right)[M]$$

Para aquellos vectores que no se coloque amortiguamiento tendrán valor cero en la solución del problema.

Adicionalmente podemos utilizar una combinación de Rayleigh y Wilson – Penzien. Siguiendo la recomendación de Clough y Penzien. Sumamos ambos efectos. Se define el último modo al cual se le asigna un amortiguamiento ω_c , β_c y se estable Rayleigh:

$[C] = a_c[K]$ de donde y $a_c = \dfrac{2\beta_c}{\omega_c}$ el amortiguamiento para cualquier otra frecuencia es

$$\beta_i = \frac{1}{2}a_c\omega_i = \frac{1}{2}\left(\frac{2\beta_c}{\omega_c}\right)\omega_i = \beta_c\left(\frac{\omega_i}{\omega_c}\right)$$

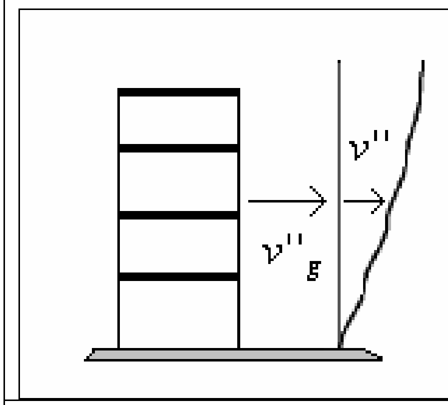
Para las frecuencias bajo ω_c se debe modificar su valor

$$\bar{\beta}_i = \beta_i - \beta_c\left(\frac{\omega_i}{\omega_c}\right)$$

Finalmente

$$[C] = a_c[K] + [M]\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{2\beta_i\omega_i}{M_i}\{\phi_i\}\{\phi_i\}^T\right)[M]$$

15. RESPUESTA SISMICA PARA UN SISTEMA DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

	$\{\ddot{v}^T\}_{nx1} = \{\ddot{v}\}_{nx1} + \{r\}_{nx1}\ddot{v}_g(t)_{1x1}$ $\{r\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$
Figura 15.1	

$$[M]\{\ddot{v}^T(t)\} + [C]\{\dot{v}(t)\} + [K]\{v(t)\} = \{0\}$$

$$[M]\{\ddot{v}(t) + \{r\}\ddot{v}_g(t)\} + [C]\{\dot{v}(t)\} + [K]\{v(t)\} = \{0\}$$

$$[M]\{\ddot{v}(t)\} + [C]\{\dot{v}(t)\} + [K]\{v(t)\} = -[M]\{r\}\ddot{v}_g(t) = \{P_{efectivo}(t)\}$$

$$\left[[K] - \omega_i^2[M]\right]\{\phi_i\} = \{0\}$$

$$\{\phi_i\}^T[M]\{\phi_i\}\ddot{y}_i(t) + \{\phi_i\}^T[C]\{\phi_i\}\dot{y}_i(t) + \{\phi_i\}^T[K]\{\phi_i\}y_i(t) = -\{\phi_i\}^T[M]\{r\}\ddot{v}_g(t)$$

$M_i\ddot{y}_i(t) + C_i\dot{y}_i(t) + K_i y_i(t) = -L_i\ddot{v}_g(t)$ i =1…n

$M_i\ C_i\ K_i$: Masa, Disipación y Rigidez modal

L_i : Factor de participación modal

15.1. CASO SÍSMICO SOLUCIÓN EN EL TIEMPO

$$y_i(t) = \frac{-1}{M_i\omega_{Di}}\int_0^t L_i\ddot{v}_g(\tau)e^{-\beta_i\omega_i(t-\tau)}sen(\omega_D(t-\tau))d\tau$$

$$y_i(t) = \frac{L_i}{M_i\omega_i} V(\beta_i, \omega_i, \ddot{v}_g)$$

$$\{v(t)\} = \sum\{\phi_i\} y_i(t) = \sum\{\phi_i\}\left\{\frac{L_i}{M_i\omega_i} V_i(t)\right\}$$

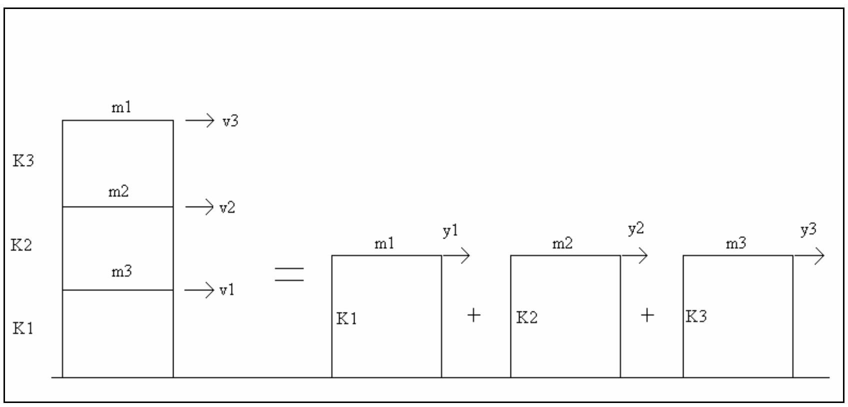
$$\{F_E(t)\} = [K]\{v(t)\} = \sum[K]\{\phi_i\}\left\{\frac{L_i}{M_i\omega_i} V_i(t)\right\}$$

$$\{F_E(t)\} = \sum[M]\{\phi_i\}\left\{\frac{\omega_i^2 L_i}{M_i\omega_i} V_i(t)\right\}$$

$$\{F_E(t)\} = \sum[M]\{\phi_i\}\left\{\frac{\omega_i L_i}{M_i} V_i(t)\right\}$$

La ventaja de esto, es que [M] es diagonal y [K] no.

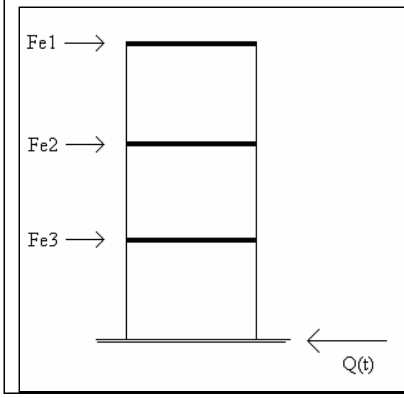
Ejemplo



Si $m = m_1 = m_2 = m_3$ y $k = k_1 = k_2 = k_3$ encontrar matriz de masa, rigidez, formas modales y factor de participación.

Repetir caso aislado asumiendo $k_1 = 0.05k$

15.1.1. Cortante Basal



$$Q(t)=\{1\}^T\{F_E(t)\}$$

$$\rightarrow\{1\}^T\sum[M]\{\phi_i\}\left\{\frac{L_i\omega_i}{M_i}V_i(t)\right\}$$

$$\rightarrow Q(t)=\sum\frac{L_i^2}{M_i}\omega_i V_i(t)$$

$\dfrac{L_i^2}{M_i}$ Se llama masa modal efectiva

Una propiedad importante asociada a la masa modal efectiva es:

$$M_{total}=\sum_{i=1}^{n}\frac{L_i^2}{M_i}=\{1\}^T[M]\{1\}$$ **La norma exige un 90 o 95 %**

Demostración

Si definimos un vector unitario en forma modal

$$\{1\}=\sum\{v_i\}=[\Phi]\{Y\}$$

Cada coeficiente es:

$$Y_i=\frac{\{\phi_i\}^T[M]\{v\}}{M_i}\Rightarrow M_iY_i=\{\phi_i\}^T[M]\{1\}=L_i$$ que es el factor de participación modal.

$$\Rightarrow Y_i=\frac{L_i}{M_i}$$ por tanto $[1]=[\Phi]\left\{\dfrac{L_i}{M_i}\right\}$

La masa total de la estructura es:

$$M_T=\sum diag([M])=\{1\}^T[M]\{1\}=\{1\}^T[M][\Phi]\left\{\frac{L_i}{M_i}\right\}$$

$$M_T=[L_1........L_n]\left\{\frac{L_i}{M_i}\right\}=\sum_{i=1}^{N}\frac{L_i^2}{M_i}$$

15.1.2. Aceleración de Piso

$$[M]\{\ddot v^T(t)\}+[C]\{\dot v(t)\}+[K]\{v(t)\}=0$$

$$-[M]\{\ddot v^T(t)\}=[C]\{\dot v(t)\}+[K]\{v(t)\}$$

Además

$$\begin{cases} [K]\{\phi_i\} = \omega_i^2 [M]\{\phi_i\} \\ \Rightarrow [M]^{-1}[K]\{\phi_i\} = \omega_i^2 \{\phi_i\} \end{cases}$$

Si $\{v(t)\} = \sum \{\phi_i\} Y_i(t)$

$$[M]\{\ddot{v}^T(t)\} = \Sigma[C]\{\phi_i\}\dot{Y}_i(t) + \Sigma[K]\{\phi_i\}Y_i(t)$$

Usando amortiguamiento Rayleigh y identidad de valores propios:

$$[M]\{\ddot{v}^T(t)\} = \Sigma\left(a[M]\{\phi_i\}\dot{Y}_i(t) + b[K]\{\phi_i\}\dot{Y}_i(t)\right) + \Sigma\,\omega_i^2[M]\{\phi_i\}Y_i(t)$$

$$\{\ddot{v}^T(t)\} = \Sigma\left(a\{\phi_i\}\dot{Y}_i(t) + \omega_i^2 b\{\phi_i\}\dot{Y}_i(t)\right) + \Sigma\,\omega_i^2\{\phi_i\}Y_i(t)$$

Pero

$$C_i = aM_i + bK_i == aM_i + \omega^2 bM_i$$

$$C_i = \left(a + \omega_i^2 b\right) M_i$$

$$\Rightarrow C_i / M_i = a + \omega_i^2 b = 2\omega_i \beta_i$$

Reemplazando

$$\{\ddot{v}^T(t)\} = \underbrace{\Sigma\, 2\omega_i\beta_i\{\phi_i\}\dot{Y}_i(t)}_{\beta_i \ll 1 \Rightarrow \approx 0} + \Sigma\,\omega_i^2\{\phi_i\}Y_i(t)$$

$$\{\ddot{v}^T(t)\} \cong \Sigma\,\omega_i^2\{\phi_i\}Y_i(t)$$

En caso espectral el valor modal máximo es $\omega_i^2\{\phi_i\}Sd_i = \{\phi_i\}Sa_i$. Luego se aplica la combinación correspondiente.

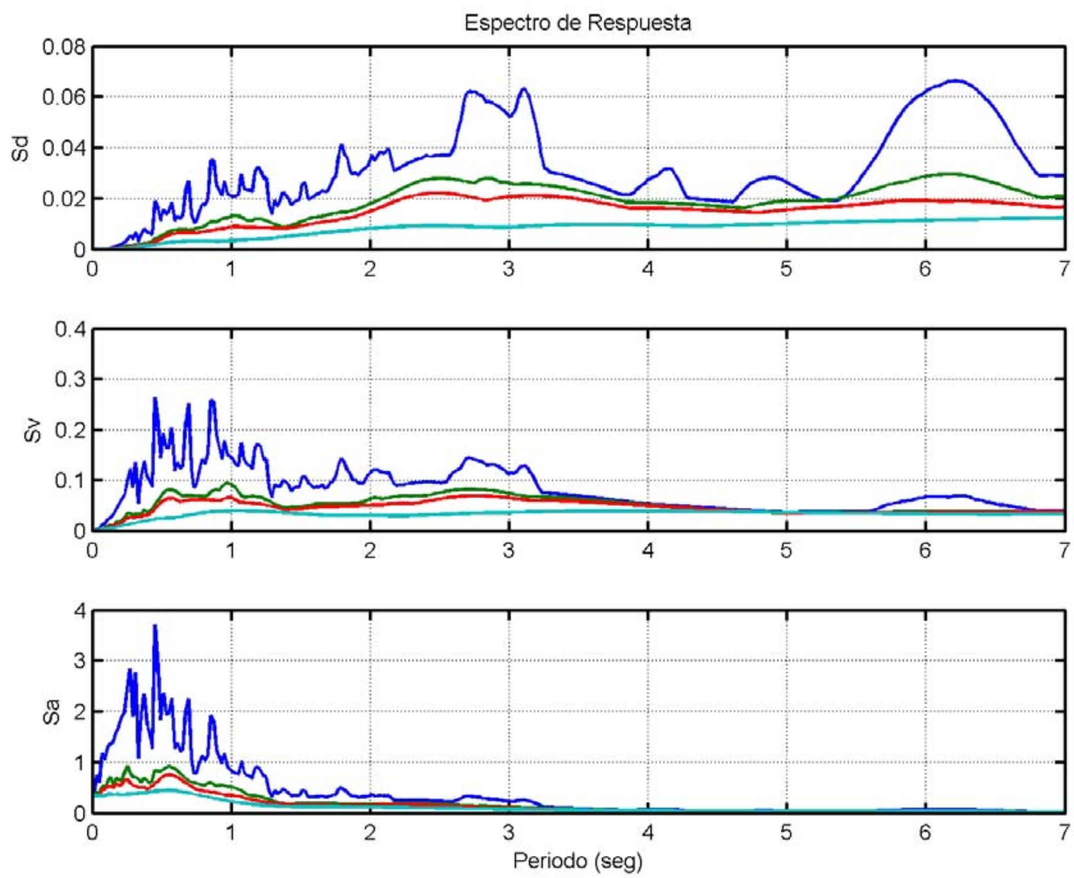
INCLUIR FIGURA

15.1.3. Desplazamiento de Entrepiso

$$\{v(t)\} = \sum \{\phi_i\} Y_i(t)$$

$$\Delta v_j = v_j(t) - v_{j-1}(t) = \sum\left(\phi_{j,i} - \phi_{j-1,i}\right) Y_i(t)$$

15.2. RESPUESTA ESPECTRAL



dinaRespSismoNGLDEspectr.m Espectros de Respuesta El Centro 1940.

$$\{v(t)\} = \sum_{i=1}^{J \ll N} \{v_i(t)\} = \sum_{i=1}^{J \ll N} \{\phi_i\} \, y_i(t)$$

Respuesta Modal Máxima

$$y_i(t) = \frac{L_i}{M_i \omega_i} V(\beta_i, \omega_i, \ddot{v}_g)$$

$$y_i(t) = \frac{L_i}{M_i \omega_i} S_d(\beta_i, T_i)$$

Desplazamiento Modal Máximo

$$\left|v_i\right| = \{\phi_i\}\frac{L_i}{M_i}S_d(\beta_i, T_i)$$

Fuerza Modal Máxima

$$\{F_{Ei}(t)\} = [M]\{\phi_i\}\left\{\frac{\omega_i^2 L_i}{M_i\omega_i}V_i(t)\right\} \text{ y } \{F_{Ei}(t)\} = [M]\{\phi_i\}\frac{L_i\omega_i^2 S_d(\beta_i, T_i)}{M_i}$$

$$\{F_{Ei}(t)\} = [M]\{\phi_i\}\frac{L_i PS_a(\beta_i, T_i)}{M_i}$$

Desplazamiento Modal Máximo de entre piso:

$$\Delta v_{j,i} = v_{j,i}(t) - v_{j-1,i}(t) = \left(\phi_{j,i} - \phi_{j-1,i}\right)Y_i(t)$$

$$\left|\Delta v_{j,i}\right| = \left(\phi_{j,i} - \phi_{j-1,i}\right)\frac{L_i}{M_i\omega_i}S_d(\beta_i, T_i)$$

15.2.1. Combinación Modal

ABS

$\{|R|\} = \sum |R_i| \rightarrow$ Conservador, pues sabemos que sumando todos los máximos, nunca se va a tener respuestas mayores

SRSS: Importante esto es valido para situaciones de duraciones importantes, no impulsivas y no monofrecuenciales

$$\{|R|\} = \left(\sum |R_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

NCH433 OF 72

$$\{|R|\}_{NCH1972} = \frac{1}{2}\left(\sum |R_i| + \left(\sum |R_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

CQC

$$|R| = \sqrt{\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\rho_{ij}R_iR_j} \quad \text{CQC}$$

Donde:

Según Der Kiureghian (1981)

$$\rho_{ij} = \frac{8\sqrt{\beta_i \beta_j}\left(\beta_i + r\beta_j\right) r^{3/2}}{\left(1-r^2\right)^2 + 4\beta_i\beta_j r\left(1+r^2\right) + 4\left(\beta_i^2+\beta_j^2\right) r^2} \text{ con } r = \frac{T_i}{T_j}$$

Para amortiguamientos iguales:

$$\rho_{ij} = \frac{8\beta^2\left(1+r\right) r^{3/2}}{\left(1-r^2\right)^2 + 4\beta^2 r\left(1+r\right)^2}$$

En la norma Chilena NCh433 que es lo misma anterior dividida por $(1+r)$

$$\rho_{ij} = \frac{8\beta^2 r^{3/2}}{(1+r)(1-r)^2 + 4\beta^2 r(1+r)}$$

Rosemblueth y Elorduy (~1969) propuso una solución intuitiva similar.

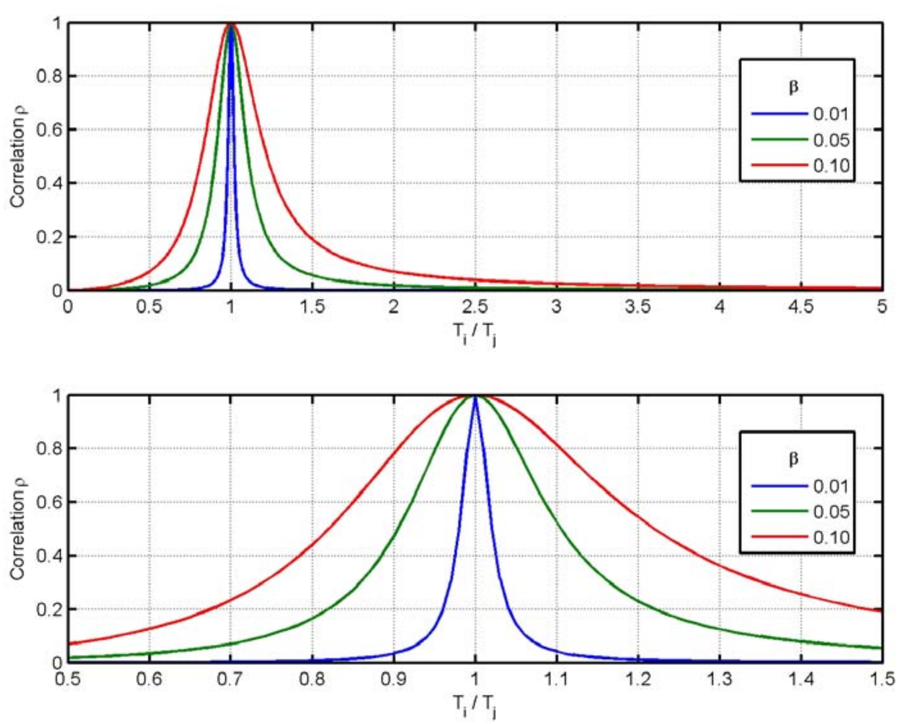


Figura 15.2 Norma Chilena NCh433 y Original

Ejemplo

```
EQ: El Centro; NGDL= 5   m=100; k=12183; beta=0.05;
```

M =

100	0	0	0	0
0	100	0	0	0
0	0	100	0	0
0	0	0	100	0
0	0	0	0	100

K =

12183	-12183	0	0	0
-12183	24366	-12183	0	0
0	-12183	24366	-12183	0
0	0	-12183	24366	-12183
0	0	0	-12183	24366

C =

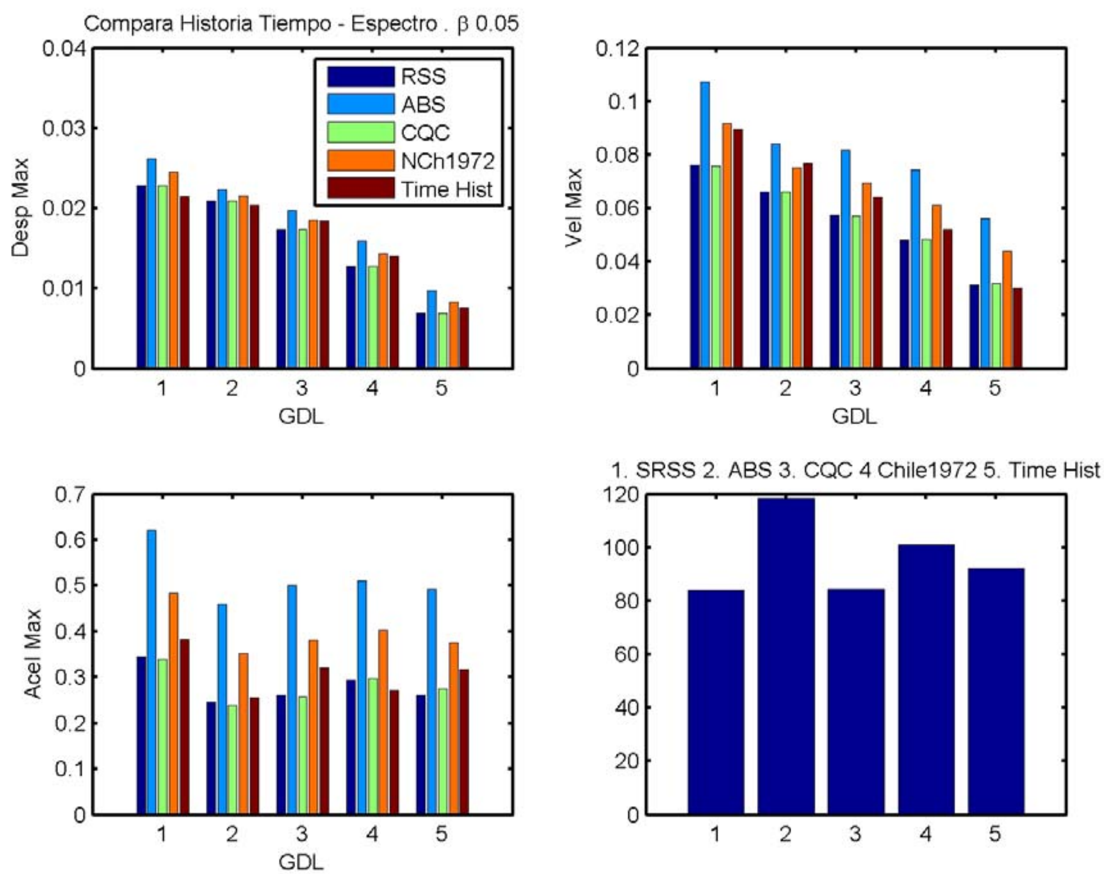
94.6621	-55.1846	-12.2270	-4.8649	-1.8935
-55.1846	137.6197	-47.8225	-9.2556	-2.9714
-12.2270	-47.8225	140.5910	-45.9290	-7.3622
-4.8649	-9.2556	-45.9290	142.4845	-42.9576
-1.8935	-2.9714	-7.3622	-42.9576	149.8467

w =	T =
3.1416	2.0000
9.1704	0.6852
14.4563	0.4346
18.5709	0.3383
21.1811	0.2966

phi =

0.0597	0.0549	0.0456	-0.0326	0.0170
0.0549	0.0170	-0.0326	0.0597	-0.0456
0.0456	-0.0326	-0.0549	-0.0170	0.0597
0.0326	-0.0597	0.0170	-0.0456	-0.0549
0.0170	-0.0456	0.0597	0.0549	0.0326

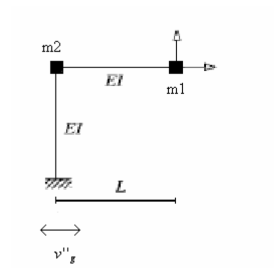
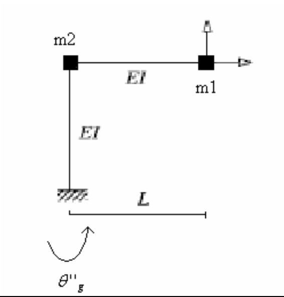
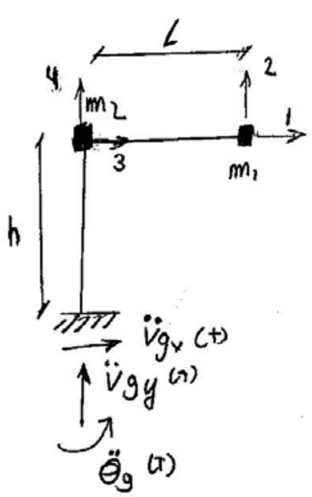
SaTn =	Yn =	Ln =	Mn =
0.1787	20.9706	20.9706	1.0000
0.6502	-6.6022	-6.6022	1.0000
0.6914	3.4796	3.4796	1.0000
0.6439	1.9377	1.9377	1.0000
0.7043	0.8853	0.8853	1.0000



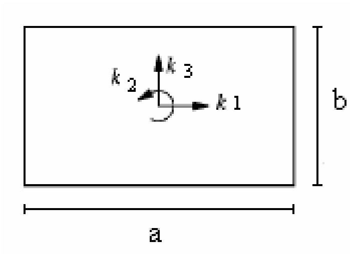
Compara respuesta Espectral y Tiempo Historia.

16. <u>VECTOR DE INFLUENCIA R</u>

Para la siguiente estructura, se tiene:

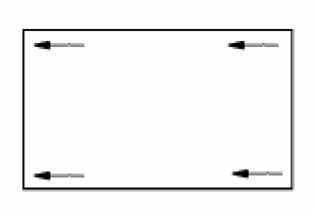
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$$r = \begin{Bmatrix} h_n \\ \vdots \\ h_1 \end{Bmatrix}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$$\left[M\right] = \begin{bmatrix} m1+m2 & 0 \\ 0 & m1 \end{bmatrix}$$
$$\left[F_I(t)\right] = \left[M\right]\left\{\ddot{v}^T(t)\right\} = \left[M\right]\left\{\ddot{v}(t) + \left\{r\right\}\ddot{v}_g(t)\right\}$$
$$r = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$$\left[M\right] = \begin{bmatrix} m1+m2 & 0 \\ 0 & m1 \end{bmatrix}$$
$$\left[F_I(t)\right] = \left[M\right]\left\{\ddot{v}^T(t)\right\} = \left[M\right]\left\{\ddot{v}(t) + \left\{r\right\}\ddot{v}_g(t)\right\}$$
$$r = \begin{Bmatrix} -h \\ L \end{Bmatrix}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$$\left[M\right] = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_1 & & \\ & & m_2 & \\ & & & m_2 \end{bmatrix}$$
$$r = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & L \\ 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$$
$$\left\{\ddot{v}_g(t)\right\} = \begin{Bmatrix} \ddot{v}_{gx}(t) \\ \ddot{v}_{gy}(t) \\ \ddot{\theta}_g(t) \end{Bmatrix}$$</td>
</tr>
</table>

17. TORSIÓN



$$m = \gamma ab$$

$$I_0 = \frac{1}{12} m\left(a^2 + b^2\right) \qquad [M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

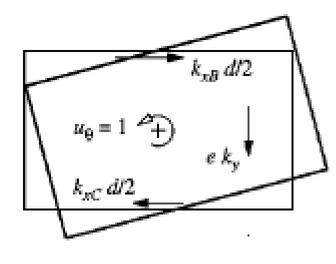


$$v_1 = 1$$

$$k_{11} = \sum (k_{ix} * 1)$$

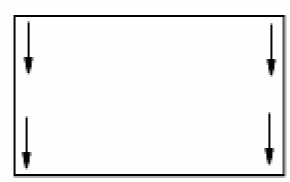
$$k_{31} = 0$$

$$k_{21} = -\sum (k_{xi} y_i)$$



$$v_2 = 1$$

$$k_{22} = \sum \left(k_{xi} y_i^2 + k_{yi} x_i^2 + k_\theta\right)$$

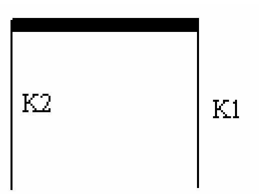


$$v_3 = 1$$

$$k_{33} = \sum k_{yi}$$

$$k_{23} = \sum k_{yi} x_i$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \sum k_{xi} & -\sum k_{xi} yi & 0 \\ -\sum k_{xi} y_i & k_{22} & \sum k_{yi} x_i \\ 0 & \sum k_{yi} x_i & \sum k_{yi} \end{bmatrix}$$



$$k = k_1 + k_2$$

$$k_x = \sum k_{xi}$$

$$k_y = \sum k_{yi}$$

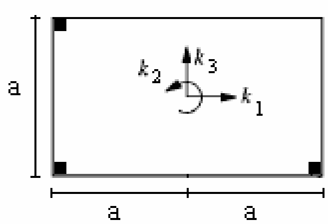
$$k_\theta = \sum \left(k_{xi} y_i^2 + k_{yi} x_i^2 + k_\theta \right)$$

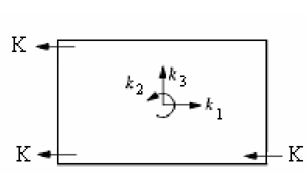
$$k_x e_y = \sum k_{xi} y_i$$

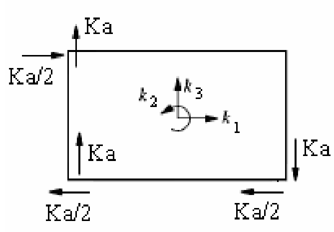
$$k_y e_x = \sum k_{yi} x_i$$

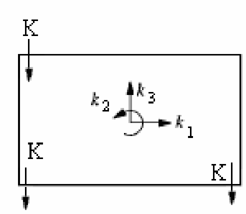
$$[K] = \begin{bmatrix} k_x & -e_y k_x & 0 \\ -e_y k_x & k_\theta & e_x k_y \\ 0 & e_x k_y & k_y \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $r = \sqrt{\frac{I_0}{m}}$
$k_\theta = 0$
$k_x = k_y = k$
$m = 1$
$a = 10$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>$k_1 = 1$


$k_{11} = 3k$
$k_{31} = 0$
$k_{21} = k\frac{a}{2} + k\frac{a}{2} - k\frac{a}{2} = k\frac{a}{2}$</td>
<td>$k_2 = 1$


$k_{22} = ka^2 + k\left(\frac{a}{2}\right)^2 + ka^2 + k\left(\frac{a}{2}\right)^2 + ka^2 + k\left(\frac{a}{2}\right)^2$</td>
<td>$k_3 = 1$


$k_{33} = 3k$
$k_{23} = -ka$
$k_{13} = 0$</td>
</tr>
</table>

$$[K]=\begin{bmatrix} 3k & \frac{ak}{2} & 0 \\ \frac{ak}{2} & 3\left(ka^2+k\frac{a^2}{4}\right) & -ak \\ 0 & -ak & 3k \end{bmatrix}$$

$$[K]=K\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & \frac{1500}{4} & -10 \\ 0 & -10 & 3 \end{bmatrix}$$ K = 1.

$$[M]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{100}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow T=\begin{bmatrix} 1.3 \\ 3.6 \\ 3.8 \end{bmatrix}$$

$$[\phi]=\begin{bmatrix} 0.21 & 0.89 & -0.45 \\ 0.87 & 0 & 0.03 \\ -0.43 & 0.45 & 0.9 \end{bmatrix}$$

17.1.1. Excentricidades:

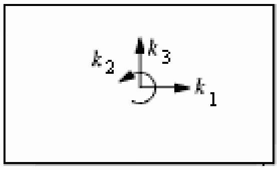
$$e_x=\frac{1}{k_y}\sum k_{yi}x_i=-\frac{ak}{3k}=-\frac{10}{3}$$

$$e_y=\frac{1}{k_x}\sum k_{xi}y_i=-\frac{k\frac{a}{2}}{3k}=-\frac{10}{6}$$

$$CR_0=\left(-\frac{10}{3},-\frac{10}{6}\right).$$

Si tenemos una acción arbitraria:

$$[M]\{\ddot{v}(t)\}+[C]\{\dot{v}(t)\}+[K]\{v(t)\}=\{P(t)\}$$



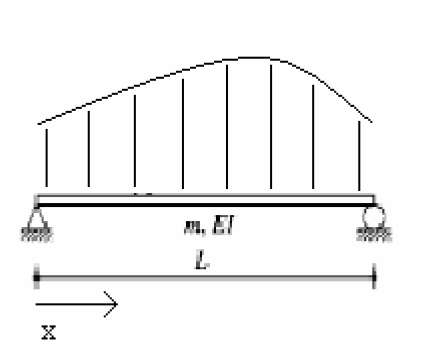
$$\left[\left[K\right]-\omega_i^2\left[M\right]\right]\left\{\phi_i\right\}=\left\{0\right\}$$

En caso de movimiento en la base:

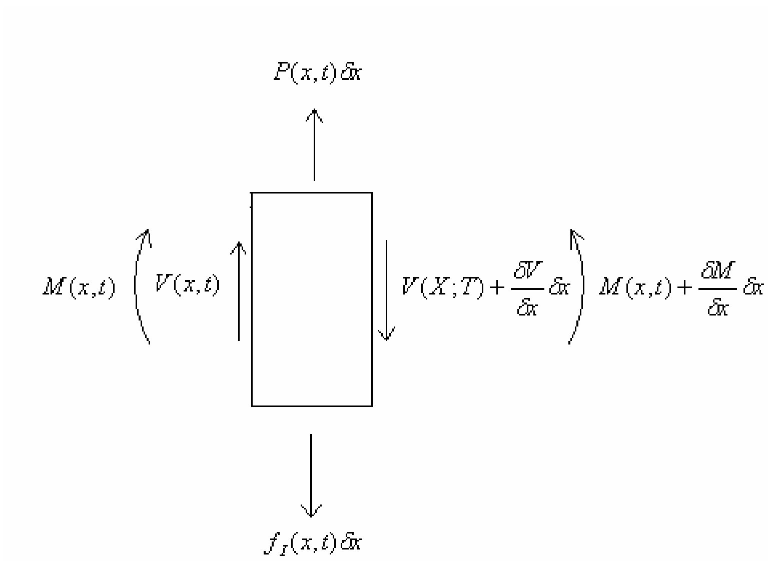
$$\left\{P(t)\right\}=\left[M\right]\left[r\right]\begin{Bmatrix}\ddot{v}_{g1}(t)\\ \ddot{v}_{g2}(t)\\ \ddot{v}_{g3}(t)\end{Bmatrix}$$

18. SISTEMAS CONTINUOS

Se tiene el siguiente estado de cargas:



Luego, con un diagrama de cuerpo libre se identifican las fuerzas que intervienen en el sistema, trabajando siempre, sobre el eje neutro



Haciendo sumatoria de fuerzas verticales:

$$\sum F_{y:}$$

$$\rightarrow V(x,t)+P(x,t)=V(x,t)+\frac{\delta V}{\delta x}\delta x+f_I(x,t)\delta x$$

Despejando se obtiene

$$\rightarrow P(x,t)=\frac{\delta V}{\delta x}+f_I(x,t)\rightarrow (1)$$

Pero, se sabe $f_I(x,t) = m(x)\dfrac{\delta^2 v}{\delta t^2}(x,t)$

Luego haciendo sumatoria sobre los momentos a los que esta sometido el cuerpo:

$\sum M_0$:

$$-M(x,t) + \frac{P(x,t)\delta x \delta x}{2} - \frac{f_I(x,t)\delta x \delta x}{2} - V(x,t)\delta x - \frac{\delta V}{\delta x}\delta x \delta x + M(x,t) + \frac{\delta M \delta x}{\delta x} = 0$$

Con lo que se obtiene

$$\rightarrow \frac{\delta M(x,t)}{\delta x} = V(x,t) \rightarrow (2)$$

Sabemos además (ecuación de la elástica)

$$M(x,t) = EI(x)\frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta x^2} \rightarrow (3)$$

Sustituyendo en (3) y (2) en (1)

$$m(x)\frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta t^2} + \frac{\delta^2}{\delta x^2}\left[EI(x)\frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta x^2}\right] = P(x,t)$$

Caso básico:

$$m\frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta t^2} + EI\frac{\delta^4(x,t)}{\delta x^4} = P(x,t)$$

Solución homogénea

$$m\frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta t^2} + EI\frac{\delta^4 v(x,t)}{\delta x^4} = 0$$

Solución del tipo: $v(x,t) = \phi(x)y(t)$

$$my''(t)\phi(x) + EI\phi^4(x)y(t) = 0.$$

$$m\frac{y''(t)}{EIy(t)} = -\frac{\phi^4(x)}{\phi(x)} = -a^4 = cte$$

De lo anterior se obtienen 2 ecuaciones, una en función del tiempo, la otra función del espacio. $y(t)$ y $\phi(x)$ respectivamente

$y''(t) + a^4\dfrac{EI}{QQQ}y(t) = 0$ $\rightarrow$ Solución del tipo $y(t) = Asen(\omega t) + B\cos(\omega t)$

$\phi^4(x) - a^4\phi(x) = 0$ $\rightarrow$ Solución del tipo $\phi(x) = Ae^{xb}$

$$Ab^4e^{xb} - a^4Ae^{xb} = 0$$

$$\left(b - a^4\right)\phi(x) = 0 \rightarrow b^4 = a^4 \rightarrow b = \{a, -a, ia, -ia\}$$

$$\phi(x) = A_1e^{ax} + A_2e^{-ax} + A_3e^{-iax} + A_4e^{iax}$$

$$\phi(x) = A_1e^{ax} + A_2e^{-ax} + A_3\{\cos(ax) - isen(ax)\} + A_4\{\cos(ax) + isen(ax)\}$$

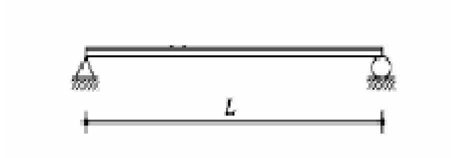
$$\phi(x) = A_1e^{ax} + A_2e^{-ax} + B_3sen(ax) + B_4\cos(ax)$$

$$\phi(x) = B_1senh(ax) + B_2\cosh(ax) + B_3sen(ax) + B_4\cos(ax)$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Resolvemos para viga simplemente apoyada.



Condiciones de borde en x = 0:

$$v(0,t) = 0 \rightarrow y(t)\phi(0) = 0$$

$$M(0,t) = 0 \rightarrow EIy(t)\phi''(0) = 0$$

$$\phi(0) = B_1 * 0 + B_2 * 1 + B_4 * 1 + B_3 * 0 = 0$$
$$\rightarrow B_2 + B_4 = 0 \qquad (1)$$

$$\phi''(0) = B_1a^2 * 0 + B_2a^2 - B_4a^2 - B_3a^2 * 0 = 0$$
$$\rightarrow B_2 = B_4 = 0 \qquad (2)$$

Condición de borde en x = L.

$$v(L,t) = 0 \rightarrow y(t)\phi(L) = 0$$

$$M(L,t) = 0 \rightarrow EI\phi''(L) = 0$$

$$\phi(L) = B_1senh(aL) + B_3sen(aL) = 0 \quad (3)$$

$$\phi''(L) = B_1a^2senh(aL) - B_3a^2sen(aL) = 0 \quad (4)$$

$$\rightarrow 2B_1 senh(aL) = 0 \rightarrow B_1 = 0$$

$$B_3 sen(aL) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{matrix} B_3 = 0 \\ aL = n\pi \rightarrow a = \dfrac{n\pi}{L} \end{matrix} \right\}$$

$$\phi(x) = B_3 sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

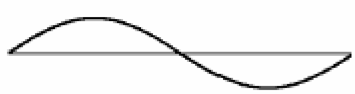
$$\omega^2 = \frac{a^4 EI}{m} = \frac{n^4\pi^4}{L^4}\frac{EI}{m} \rightarrow \frac{n^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Tenemos infinitos modos, como corresponde a una viga en un sistema continuo. Los primeros 3 serian:

$$\phi(x) = Bsen\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

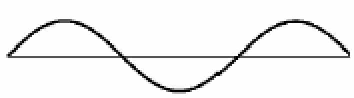
$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\phi(x) = Bsen\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$



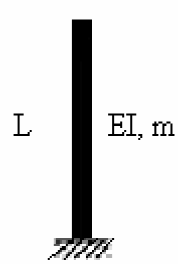
$$\omega_2 = \frac{4\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\phi(x) = Bsen\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$



$$\omega_3 = \frac{9\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Para el caso de una viga “cantilever”



En x = 0, el desplazamiento y la flexión es nula

$$v(0,t) = 0 \rightarrow \phi(0) = 0 \rightarrow B_2 + B_4 = 0$$

$$\dot{v}(0,t) = 0 \rightarrow \phi'(0) = 0 \rightarrow B_1 = -B_3$$

En el extremo libre: momento nulo

$$M(L,t)=0 \rightarrow EI\phi''(L)=0$$

$$B_3 sen(aL)+B_4\left(\cos(aL)+\cosh(aL)\right)=0$$

Corte nulo:

$$V(L,t)=0 \rightarrow EI\phi'''(L)=0$$

$$B\left(\cos(aL)+\cosh(aL)\right)+B\left(-sen(aL)+senh(aL)\right)=0$$

Rescribiendo:

$$\begin{bmatrix} sen(aL)+senh(aL) & \cos(aL)+\cosh(aL) \\ \cos(aL)+\cosh(aL) & -sen(aL)+senh(aL) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_3 \\ B_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow 1+\cosh(aL)\cos(aL)=0$$

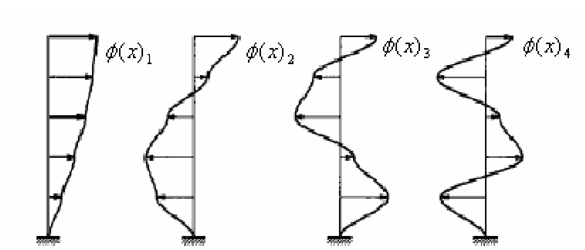
$$a_1 L = 1.8751$$

$$a_2 L = 4.6941$$

$$a_3 L = 7.8548$$

$$a_4 L = 10.996$$

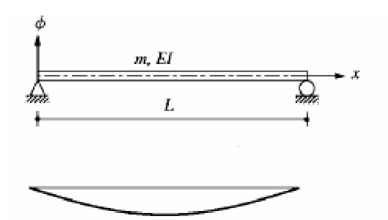
Para n>4 $a_n L \approx (2n-1)\dfrac{\pi}{2}$



$$\phi_n(x)=B_3\left[\cosh(a_n x)-\cos(a_n x)-\frac{\cosh(a_n L)+\cos(a_n L)}{senh(a_n L)+sen(a_n L)}\left(seh(a_n x)-sen(a_n x)\right)\right]$$

18.1.1. Demostrando Ortogonalidad.

Sea una viga cuya deformada tenga la siguiente forma:



$$v(x,t) = Y(t)\phi(x) = z_i sen(\omega_i t)\phi_i(x)$$
$$f_I(x,t) = m(x)\omega_i^2 z_i sen(\omega_i t)\phi_i(x)$$

$$|v_i(x,t)| = z_i\phi_i(x)$$
$$|f_I(x,t)| = z_i\omega_i^2 m(x)\phi_i(x)$$
$$|v_j(x,t)| = z_j\phi_j(x)$$
$$|f_i(x,t)| = z_j\phi_j\omega_j^2 m(x)$$

$$\int_0^L f_i(x,t)v_j(t,x)\delta x = \int_0^L f_j(x,t)v_i(x,t)\delta x \quad \text{(Betti)}$$

$$\int_0^L m(x)z_i\omega_i^2\phi_i(x)\phi_j(x)z_j\delta x = \int_0^L m(x)z_j\omega_j^2\phi_j z_i\phi_i\delta x$$

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)\int_0^L m(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\delta x = 0$$

$i = j \rightarrow \int m(x)\phi_i^{\,2}(x)\delta x \Rightarrow$ Masa modal

$i \neq j \rightarrow \int m(x)\phi_i\phi_j\delta x = 0$

$$m(x)\frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta t^2} + \frac{\delta^2}{\delta x^2}\left(EI(x)\frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta x^2}\right) = P(x,t)$$
$$v(x,t) = \phi(x)y(t)$$
$$\phi(x)Asen(ax) + B\cos(ax) + C\cosh(ax) + Dsenh(ax)$$

Condiciones de borde $\rightarrow \omega$

Condiciones iniciales.

$$\int m(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\delta x = \begin{cases} M_i \rightarrow i = j \\ 0 \rightarrow i \neq j \end{cases} \quad \text{Para } \omega_i \neq \omega_j$$

$$\int m(x)\phi_i^2(x)\delta x = M_i$$

$$m(x)\frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta t^2} + \frac{\delta^2}{\delta x^2}\left(EI(x)v''(x,t)\right) = 0$$

Pero $v_i = \phi_i(x)y_i(t)$

$$\int \phi_j(x)\delta x\left[m(x)y_i''(t)\phi(x)+\frac{\delta^2}{\delta x^2}\big(EI(x)y_i(t)\phi''(x)\big)\right]=0$$

$$y_i''(t)\int m(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\delta x + y_i(t)\int \phi_j(x)\frac{\delta^2}{\delta x^2}\big(EI(x)\phi_i''(x)\big)\delta x=0$$

$$*\int_0^L \phi_j(x)\frac{\delta^2}{\delta x^2}\big(EI(x)\phi_i''(x)\big)\delta x=\begin{cases}0 \rightarrow i\neq j\\ k_i \rightarrow i=j\end{cases}$$

El δx va a lo largo del eje neutro. Integrando *, por partes

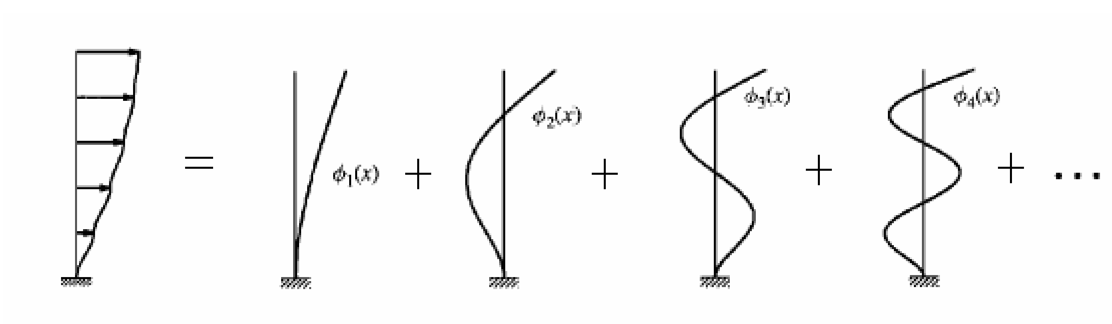
$$\phi_j(x)\frac{\delta}{\delta x}\big(EI(x)\phi_i''(x)\big)\Big|_0^L-\int \phi_j'\frac{\delta}{\delta x}\big(EI(x)\phi_i''(x)\big)\delta x=0$$

$$\phi_j(x)Q(x)\Big|_0^L-\phi_j'(x)\big(EI(x)\phi''(x)\big)\Big|_0^L+\int \phi_j''(x)EI(x)\phi_i''\delta x=0$$

$$m(x)\frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta t^2}+\frac{\delta^2}{\delta x^2}\left(EI(x)\frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta x^2}\right)=P(x,t)$$

$$v(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i(x)y_i(t)$$

Luego la respuesta final real, se puede expresar como una suma de todas las respuestas asociadas a cada modo:



$$v(x,0)=v_0(x)=\sum \phi_i(x)y_i(t)$$

$$\int m(x)\phi_j(x)v_0(x)\delta x=\int m(x)\phi_j(x)\Big(\sum \phi_i(x)y_i(t)\Big)\delta x$$

$$\int m(x)\phi_j(x)v_0(x)\delta x=y_j(0)\int m(x)\phi_j^2(x)\delta x$$

$$y_j(0) = \frac{\int m(x)\phi_j(x)v_0(x)\delta x}{\int m(x)\phi_j^2(x)\delta x}$$

$$\int \phi_j m(x)\left(\sum \phi_i(x) y_i''(t)\right)\delta x + \int \phi_j(x)\left[\frac{\delta^2}{\delta x^2}\left(EI(x)\left(\sum y_i(t)\phi_i''(x)\right)\right)\right]\delta x = \int P(x,t)\phi_j(x)\delta x.$$

$$y_j''(t)\int m(x)\phi_j^2(x)\delta x + y_j(t)\left(\omega_j^2 M_j\right) = P^*(t)$$

$$y_j''(t)M_j + \omega^2 M_j y_j(t) = P^*(t) \qquad j = 1\ldots\infty$$

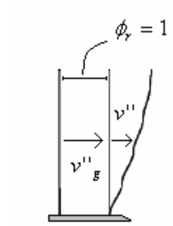
$$M_j y_j''(t) + 2\beta_j\omega_j M_j y_j'(t) + \omega_j^2 M_j y_j(t) = P_j^*(t)$$

$$y_j(0) = \frac{\int m(x)\phi_j(x)v_0(x)\delta x}{M_j}$$

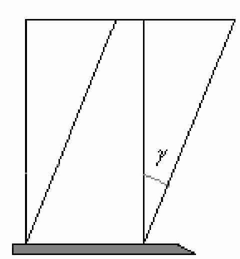
$$F_I(x,t) = m(x)\ddot{v}^T(x,t)$$

$$\rightarrow \quad \begin{aligned} &= m(x)\left[\ddot{v}(x,t) + \phi_r(x)v_g(t)\right] \\ &\phi_r = 1 \end{aligned}$$

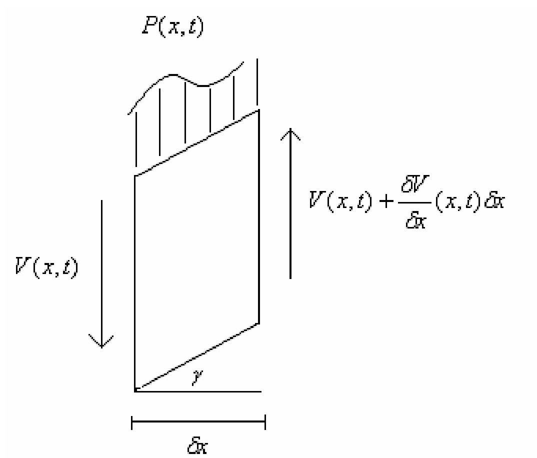
$$P_{EF}(x,t) = -m(x)\phi_r(x)\ddot{v}_g(t)$$



18.1.2. Deformación por Corte (distorsión angular)



Luego haciendo un diagrama de fuerzas, se tiene:



Con lo que se puede plantear las siguientes ecuaciones:

$$(*) - m(x)\frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta t} + \frac{\delta V(x,t)}{\delta x} = -P(x,t)$$

$$F_I(x,t)\delta x - V(x,t) + V(x,t) + \frac{\delta V}{\delta x}(x,t)\delta x + P(x,t)\delta x = 0$$

$$\tau = G\gamma$$

$$\frac{V(x,t)}{A'} = G(x)\frac{\delta v(x,t)}{\delta x}$$

$$\frac{\delta V(x,t)}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x}\left(GA(x)\frac{\delta v(x,t)}{\delta x}\right)$$

$$(*) \rightarrow m\frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta t^2} - \frac{\delta}{\delta x}\left(GA(x)\frac{\delta v(x,t)}{\delta x}\right) = P(x,t)$$

$$mv''(x,t) - GA'v''(x,t) = P(x,t)$$

$$v(x,t) = \sum \phi(x)y(t)$$

$$\phi(x) = Asen\left(\sqrt{\frac{m}{GA'}}ax\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{m}{GA}}ax\right)$$

19. ANEXO A

Respuesta a Impulso Senosoidal

Fase I $\rightarrow c = 0$

$$P(t) = P_0 sen(\varpi t)$$

$$v_0 = 0, \dot{v}_0 = 0$$

$$v(t) = (Asen(\omega t) + B\cos(\omega t))\left(\frac{1}{1-\left(\frac{\varpi}{\omega}\right)^2}\right) sen(\varpi t)$$

$$v(t) = \frac{P_0}{k}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{\varpi}{\omega}\right)^2}\right)\left(sen(\varpi t) - \frac{\varpi}{\omega} sen(\omega t)\right)$$

$$\dot{v}(t) = \frac{P_0}{k}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{\varpi}{\omega}\right)^2}\right)\left(\varpi \cos(\varpi t) - \varpi \cos(\omega t)\right)$$

$\dot{v}(t) = 0$ //Para obtener el máximo

$$\varpi \cos(\varpi t) = \varpi \cos(\omega t)$$

$$\varpi t = \omega t + 2\pi n = 2\pi n - \omega t$$

$$\Rightarrow \varpi t = 2\pi - \omega t$$

$t = \dfrac{2\pi}{\varpi + \omega}$ $\quad / \varpi$

$t\varpi = \dfrac{2\pi}{1 + \frac{\omega}{\varpi}} < \pi$ (Ya que $t_1 \varpi = \pi$)

Para forzar que el máximo esté en la Fase I

$$\frac{\bar{T}}{T} > 1$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} t_1 = 2t_1$$

$$\Rightarrow \frac{t_1}{T} > \frac{1}{2}$$

$$v_{\max} = \frac{P_0}{k} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega} \right)^2} \right) sen \left(\frac{2\pi}{1 + \frac{\omega}{\bar{\omega}}} \right)$$

Para que ocurra Fase II

$$\frac{t_1}{T} < 1$$

$$v_{\max} = \sqrt{v_0^{\ 2} + \left(\frac{\dot{v}_o}{\omega} \right)^2}$$

Donde las condiciones iniciales son las del término de la Fase I

$$\Rightarrow v_0 = \dot{v}(t_1)$$

$$\dot{v}_0 = \dot{v}(t_1)$$

$$v_{\max} = \frac{P_0}{k} \frac{2}{1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega} \right)^2} \frac{\bar{\omega}}{\omega} \cos \left(\frac{\pi \omega}{2\bar{\omega}} \right)$$