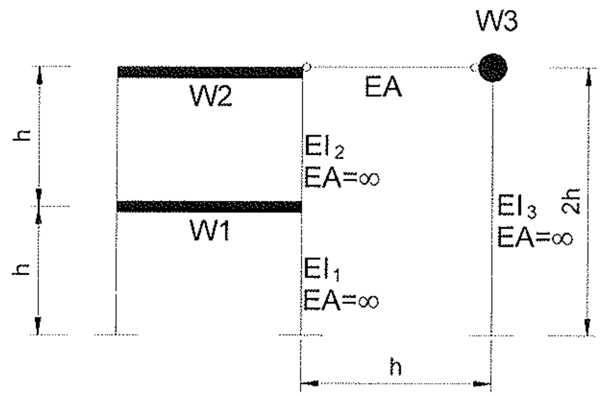
Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Civil
16 de Octubre de 2009

# EJERCICIO VII
## CI42G Dinámica de Estructuras
Prof: Rubén Boroschek Krauskopf

**Problema 1:**

Considere la estructura mostrada en la siguiente figura:




Se pide:

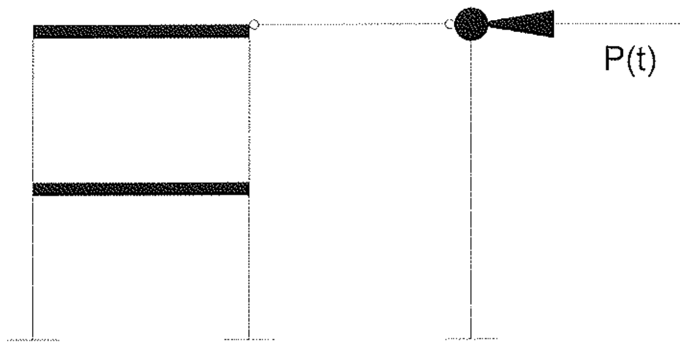
a. Determine las matrices de masa y rigidez de la estructura en forma simbólica.
b. Evaluar las matrices y obtener formas y periodos modales. Dibuje las formas modales.
c. Determine una matriz de amortiguamiento clásica mediante el método de Rayleigh, asumiendo $\beta_1$=5% y $\beta_2$=19%.

Datos:

- h : 3 m
- EA : 10.000 tonf
- $EI_1$ : 2.000 tonf·m²
- $EI_2$ : 1.000 tonf·m²
- $EI_3$ : 4.000 tonf·m²
- $W_1$ : 40 tonf
- $W_2$ : 20 tonf
- $W_3$ : 10 tonf

**Problema 2:**

Considerando la misma estructura del caso anterior, suponga que se aplica una carga horizontal P(t) en el punto superior de la estructura de la derecha:




La carga está definida como media sinusoide, de amplitud máxima Po y duración to. Se pide determinar el desplazamiento absoluto máximo del nivel intermedio de la estructura izquierda.

Datos:

- Po : 10 tonf
- to : 0,03 s

**CI42G DINÁMICA DE ESTRUCTURAS**
**PAUTA EJERCICIO VII**

**PREGUNTA 1**

**Datos del Problema**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $EA := 10000$ | | $h := 3$ | m | $g := 9.81$ | m / s2 | $\beta 1 := 0.05$ |
| $EI1 := 2000$ | tonf·m2 | $EI2 := 1000$ | tonf·m2 | $EI3 := 4000$ | tonf·m2 | $\beta 2 := 0.19$ |
| $W1 := 40$ | tonf | $W2 := 20$ | tonf | $W3 := 10$ | tonf | |

**Parte A - Determinación de Matrices de Masa y Rigidez**

$$M := \begin{pmatrix} \frac{W1}{g} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{W2}{g} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{W3}{g} \end{pmatrix} \qquad K := \begin{bmatrix} \frac{24\cdot(EI1+EI2)}{h^3} & -\frac{24\cdot EI2}{h^3} & 0 \\ -\frac{24\cdot EI2}{h^3} & \frac{24\cdot EI2}{h^3}+\frac{EA}{h} & \frac{-EA}{h} \\ 0 & \frac{-EA}{h} & \frac{3\cdot EI3}{(2\cdot h)^3}+\frac{EA}{h} \end{bmatrix}$$

**Parte B - Evaluación de Matrices y Obtención de Formas y Periodos Modales**

$$M = \begin{pmatrix} 4.077 & 0 & 0 \\ 0 & 2.039 & 0 \\ 0 & 0 & 1.019 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 2.667\times 10^3 & -888.889 & 0 \\ -888.889 & 4.222\times 10^3 & -3.333\times 10^3 \\ 0 & -3.333\times 10^3 & 3.389\times 10^3 \end{pmatrix}$$

Resolución del problema de valores propios:

$$A := M^{-1}\cdot K = \begin{pmatrix} 654 & -218 & 0 \\ -436 & 2.071\times 10^3 & -1.635\times 10^3 \\ 0 & -3.27\times 10^3 & 3.325\times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$w := \sqrt{\mathrm{eigenvals}(A)} = \begin{pmatrix} 13.229 \\ 27.806 \\ 71.424 \end{pmatrix}$$ Frecuencias angulares

$$T := \frac{2\cdot\pi}{w} = \begin{pmatrix} 0.475 \\ 0.226 \\ 0.088 \end{pmatrix}$$ Periodos modales

$$\Phi := \text{eigenvecs}(A) = \begin{pmatrix} -0.301 & 0.748 & 0.023 \\ -0.662 & -0.409 & -0.477 \\ -0.687 & -0.524 & 0.878 \end{pmatrix}$$

Formas modales

**Parte C - Matriz de Amortiguamiento Clásica**

Matriz de amortiguamiento clásica. Se determinan los coeficientes como:

$$\begin{pmatrix} a0 \\ a1 \end{pmatrix} := 2\cdot\left[\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{w_0} & w_0 \\ \frac{1}{w_1} & w_1 \end{pmatrix}\right)^{-1}\cdot\begin{pmatrix} \beta 1 \\ \beta 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1.382 \\ 0.015 \end{pmatrix}$$

$$C := a0\cdot M + a1\cdot K = \begin{pmatrix} 35.575 & -13.736 & 0 \\ -13.736 & 62.43 & -51.51 \\ 0 & -51.51 & 50.961 \end{pmatrix}$$

Amortiguamiento del modo 3:

$$\beta 3 := \frac{a0}{2\cdot w_2} + \frac{a1\cdot w_2}{2} = 0.542$$

**PREGUNTA 2**

**Determinacion de Carga P(t)**

$i := 0 .. 10000$

$t_i := \frac{i}{1000}$ — Vector de tiempo (10 segundos @0.001)

$Po := 10 \quad \text{tonf}$ — Amplitud de la carga

$to := 0.03 \quad s$ — Duración de la carga

$P1 := 0 \cdot t$ — Carga en gdl 1 (real, no modo)

$P2 := 0 \cdot t$ — Carga en gdl 2

$P3 := Po \cdot \sin\left(\frac{\pi}{to} \cdot t\right)$ — Carga en gdl 3

**Solución Para Modo 1**

Parámetros modales:

$Modo1 := \Phi^{\langle 0 \rangle}$ — Forma modal

$m1 := Modo1^T \cdot M \cdot Modo1 = 1.743$ — Masa modal

$k1 := Modo1^T \cdot K \cdot Modo1 = 304.979$ — Rigidez modal

$w1 := w_0 = 13.229$ — Frecuencia modal

$\beta 1 = 0.05$ — Amortiguamiento modal

$\frac{T_0}{4} = 0.119$ — Aplica impacto (Ti/4 > to)

La amplitud de la carga modal corresponde a:

$$Po1 := Modo1_0 \cdot 0 + Modo1_1 \cdot 0 + Modo1_2 \cdot Po = -6.868$$

Se obtienen las condiciones iniciales como:

$$xo_i = 0$$

$$vo_i = \frac{1}{m_i}\int_0^{to} Po_i \cdot sen\left(\frac{\pi}{to}\cdot t\right)dt = \frac{2\cdot Po_i \cdot to}{\pi \cdot m_i}$$

En este caso:

$xo1 := 0$ Desplazamiento inicial

$vo1 := \frac{2\cdot Po1\cdot to}{\pi\cdot m1} = -0.075$ Velocidad inicial

Respuesta de sistema amortiguado a condiciones iniciales

$$w1D := \sqrt{1-\beta1^2}\cdot w1 = 13.212$$

$$y1_i := e^{-\beta1\cdot w1\cdot t_i}\cdot\left(\frac{vo1 + xo1\cdot\beta1\cdot w1}{w1D}\cdot\sin\left(w1D\cdot t_i\right) + xo1\cdot\cos\left(w1D\cdot t_i\right)\right)$$

**Solución Para Modo 2**

Parámetros modales:

$Modo2 := \Phi^{\langle 1\rangle}$ Forma modal

$m2 := Modo2^T\cdot M\cdot Modo2 = 2.898$ Masa modal

$k2 := Modo2^T\cdot K\cdot Modo2 = 2.241\times 10^3$ Rigidez modal

$w2 := w_1 = 27.806$ Frecuencia modal

$\beta2 = 0.19$ Amortiguamiento modal

$\frac{T_1}{4} = 0.056$ Aplica impacto (Ti/4 > to)

La amplitud de la carga modal corresponde a:

$$Po2 := Modo2_0\cdot 0 + Modo2_1\cdot 0 + Modo2_2\cdot Po = -5.237$$

Se obtienen las condiciones iniciales como:

$$xo_i = 0$$

$$vo_i = \frac{1}{m_i}\int_0^{to} Po_i \cdot sen\left(\frac{\pi}{to}\cdot t\right)dt = \frac{2\cdot Po_i \cdot to}{\pi \cdot m_i}$$

En este caso:

$xo2 := 0$ Desplazamiento inicial

$vo2 := \frac{2\cdot Po2\cdot to}{\pi\cdot m2} = -0.035$ Velocidad inicial

Respuesta de sistema amortiguado a condiciones iniciales

$$w2D := \sqrt{1-\beta2^2}\cdot w2 = 27.299$$

$$y2_i := e^{-\beta2\cdot w2\cdot t_i}\cdot\left(\frac{vo2 + xo2\cdot\beta2\cdot w2}{w2D}\cdot\sin\left(w2D\cdot t_i\right) + xo2\cdot\cos\left(w2D\cdot t_i\right)\right)$$

**Solución Para Modo 3**

Parámetros modales:

$Modo3 := \Phi^{\langle 2\rangle}$ Forma modal

$m3 := Modo3^T\cdot M\cdot Modo3 = 1.253$ Masa modal

$k3 := Modo3^T\cdot K\cdot Modo3 = 6.393\times 10^3$ Rigidez modal

$w3 := w_2 = 71.424$ Frecuencia modal

$\beta3 = 0.542$ Amortiguamiento modal

$\frac{T_2}{4} = 0.022$ No aplica impacto (Ti/4 > to) pero por indicación en ejercicio se usa

La amplitud de la carga modal corresponde a:

$$Po3 := Modo3_0\cdot 0 + Modo3_1\cdot 0 + Modo3_2\cdot Po = 8.784$$

Se obtienen las condiciones iniciales como:

$$xo_i = 0$$

$$vo_i = \frac{1}{m_i}\int_0^{to} Po_i \cdot sen\left(\frac{\pi}{to}\cdot t\right)dt = \frac{2\cdot Po_i\cdot to}{\pi\cdot m_i}$$

En este caso:

$xo3 := 0$ Desplazamiento inicial

$vo3 := \frac{2\cdot Po3\cdot to}{\pi\cdot m3} = 0.134$ Velocidad inicial

Respuesta de sistema amortiguado a condiciones iniciales

$$w3D := \sqrt{1-\beta3^2}\cdot w3 = 60.014$$

$$y3_i := e^{-\beta3\cdot w3\cdot t_i}\cdot\left(\frac{vo3 + xo3\cdot\beta3\cdot w3}{w3D}\cdot\sin\left(w3D\cdot t_i\right) + xo3\cdot\cos\left(w3D\cdot t_i\right)\right)$$

**Respuesta en GDL Reales**

La respuesta del sistema en sus gdl reales está dada por:

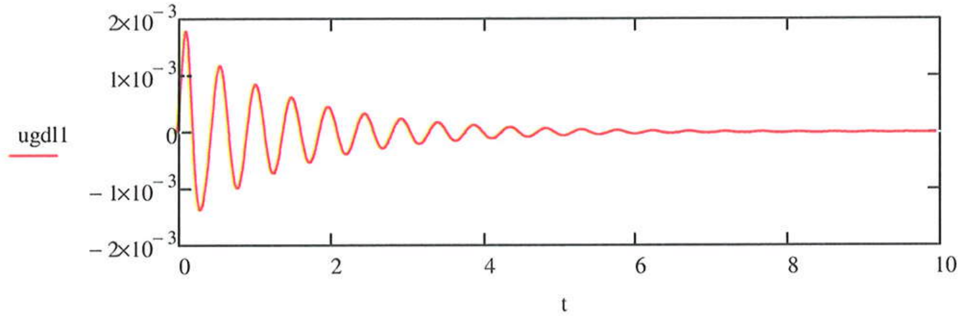
$$u(t) = \sum_{i=1}^{NModos}\Phi i\cdot yi$$

Dado que en el problema se pregunta sólo por el nivel intermedio de la estructura izquierda (GDL 1), podemos simplificar la expresión a:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{NModos}\Phi(1,i)\cdot yi$$

Luego se tiene:

$$ugdl1 := Modo1_0\cdot y1 + Modo2_0\cdot y2 + Modo3_0\cdot y3$$




Los valores extremos del desplazamiento en el grado de libertad (real) 1 son:

$$\min(\text{ugdl1}) = -1.363 \times 10^{-3} \quad \text{m}$$

$$\max(\text{ugdl1}) = 1.789 \times 10^{-3} \quad \text{m}$$