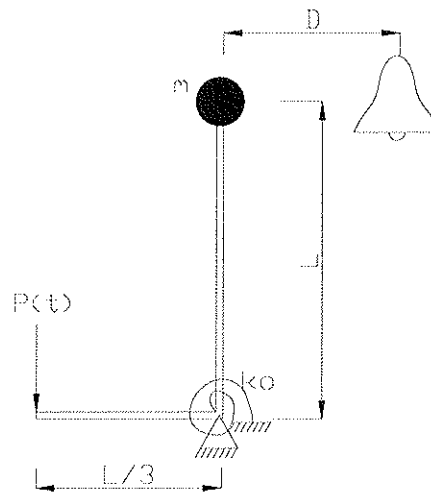


EJERCICIO IV
CI42G Dinámica de Estructuras
Prof: Rubén Boroschek Krauskopf

Problema 1:

Considere la estructura de la figura, compuesta por una barra en “L”, infinitamente rígida y sin masa, que pivotea en torno a su vértice, donde además se dispone un resorte torsional. A fin de ganar un premio (un 7 en la pregunta 1), usted puede impactar el extremo inferior de la barra, para que su extremo superior se desplace lo suficiente para golpear la campana.



- Determine la amplitud P_0 mínima del impacto, suponiendo que este tiene duración $t_0 = 0,10$ segundos, y que la forma del mismo es sinusoidal.
- Determine la amplitud P_0 mínima del impacto, suponiendo que este tiene duración $t_0 = 0,10$ segundos, y que la forma del mismo es parabólica.

Datos:

- k_0 : 100 tonf·m
- m : 1 tonf·s²/m
- L : 2 m
- D : 20 cm
- No hay amortiguamiento

Problema 2:

Utilizando integral de Duhamel, suponga un oscilador de 1 grado de libertad, con masa m y rigidez k :

- Determine la ecuación para el desplazamiento en el tiempo, para una carga en rampa (de 0 a P_0) de duración t_0 .
- Determine la amplitud máxima de desplazamiento, suponiendo que la carga anterior es un impacto, y compare con el valor obtenido en la parte a.

Datos:

- $k : 100 \text{ tonf/m}$
- $m : 1 \text{ tonf}\cdot\text{s}^2/\text{m}$
- $P_0 : 10 \text{ tonf}$
- $t_0 : 0,15 \text{ s}$
- No hay amortiguamiento

Indicación:

$$\int x^n \sin(x) dx = -x^n \cos(x) + \int x^{n-1} \cos(x) dx + C$$

P1

DETERMINACIÓN DE PERIODO

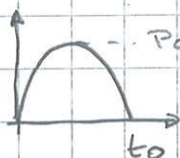
$$k^* = (k_0 - mgL) \text{ (pequeñas deformaciones)}$$

$$m^* = mL^2$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m^*}{k^*}} = 2\pi \sqrt{\frac{1 \cdot 2^2}{100 - 1.981 \cdot 2}} = 1.402 \text{ s}$$

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

$$mL^2 \ddot{\theta} + (k_0 - mgL) \theta = \frac{L}{3} \cdot P(t)$$

a) $P(t) =$  $P(t) = \frac{L}{3} P_0 \sin\left(\frac{\pi}{t_0} t\right)$

DADO QUE $t_0 < T_n/4$, APLICAMOS IMPACTO

$$\theta_0 = 0$$

$$\dot{\theta}_0 = \frac{1}{m^*} \int_0^{t_0} P(t) dt = \frac{1}{mL^2} \int_0^{t_0} \frac{L}{3} P_0 \sin\left(\frac{\pi}{t_0} t\right) dt$$

$$= \frac{P_0}{3mL} \int_0^{t_0} \sin\left(\frac{\pi}{t_0} t\right) dt = \frac{P_0}{3mL} \left[-\frac{t_0}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{t_0} t\right) \right]_0^{t_0}$$

$$= \frac{P_0 \cdot t_0}{3\pi mL} [1 + 1] = \frac{2 P_0 \cdot t_0}{3\pi mL}$$

$$\boxed{\dot{\theta}_0 = \frac{2 P_0 \cdot t_0}{3\pi mL}}$$

OBTENEMOS LA RESPUESTA PARA $\tilde{\theta}(t)$, USANDO CONDICIONES INICIALES.

$$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} \sin(\omega \cdot t) + \theta_0 \cdot \cos \omega t$$

LUEGO, LA AMPLITUD MAXIMA ES

$$\theta_{\max} = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} = \frac{2 P_0 t_0}{3 \pi m L} \cdot \sqrt{\frac{m L^2}{k_0 - m g L}}$$

Se requiere $\theta_{\max} \cdot L = D$

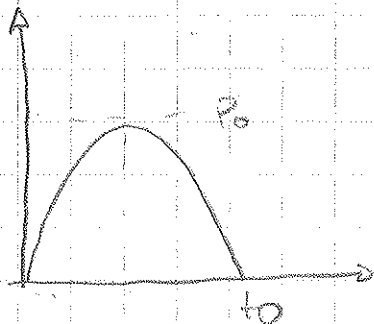
$$\Rightarrow \frac{2 P_0 t_0}{3 \pi m L} \cdot \sqrt{\frac{m L^2}{k_0 - m g L}} \cdot L = D$$

$$P_0 = D \cdot \sqrt{\frac{k_0 - m g L}{m L^2}} \cdot \frac{3 \pi m}{2 t_0}$$

$$= 0,2 \cdot \sqrt{\frac{100 - 9,81 \cdot 1 \cdot 2}{1 \cdot 2^2}} \cdot \frac{3 \pi}{2 \cdot 0,1}$$

$$P_0 = 42,248 \text{ tonf}$$

b) $P(t)$



$$P(t) = a \cdot t^2 + b t + c$$

$$P(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$P(t_0) = 0 \Rightarrow$$

$$a t_0^2 + b t_0 = 0$$

$$a t_0 + b = 0$$

$$\Rightarrow b = -a t_0$$

$$P(t_0/2) = P_0$$

$$a \cdot \frac{t_0^2}{4} - a \cdot t_0 \cdot \frac{t_0}{2} = P_0$$

$$a \frac{t_0^2}{4} - a \frac{t_0^2}{2} = P_0$$

$$-a \frac{t_0^2}{4} = P_0 \Rightarrow a = -\frac{4P_0}{t_0^2}$$

$$P(t) = -\frac{4P_0}{t_0^2} t^2 + \frac{4P_0}{t_0} t$$

} del impacto
no P_{eff}
de la ecuación

OBTENEMOS LA CONDICIÓN INICIAL

$$\dot{\theta}_0 = \frac{1}{mL} \int_0^{t_0} P_{eff} dt$$

$$= \frac{1}{mL} \int_0^{t_0} \frac{L}{3} \cdot \frac{4P_0}{t_0} \left[-\frac{t^2}{t_0} + t \right] dt$$

$$= \frac{4P_0}{3mL t_0} \left[\int_0^{t_0} t dt - \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} t^2 dt \right]$$

$$= \frac{4P_0}{3mL t_0} \left[\frac{t_0^2}{2} - \frac{1}{t_0} \frac{t_0^3}{3} \right] = \frac{4P_0}{3mL t_0} \left[\frac{t_0^2}{2} - \frac{t_0^2}{3} \right]$$

$$= \frac{4P_0 t_0}{3mL} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2P_0 t_0}{9mL}$$

$$\boxed{\dot{\theta}_0 = \frac{2P_0 t_0}{9mL}}$$

AL IGUAL QUE EN LA PARTE a) SE TIENE

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_0}{w} - \frac{2P_0 t_0}{9mL} \sqrt{\frac{mL^2}{k_0 - mgL}}$$

SE IMPONE $\sigma_{\max} \cdot L = D$

$$\frac{2P_0 t_0}{9mL} \sqrt{\frac{mL^2}{k_0 - mgL}} \cdot L = D$$

$$P_0 = D \cdot \sqrt{\frac{k_0 - mgL}{mL^2}} \cdot \frac{9m}{2t_0}$$

$$= 0,2 \sqrt{\frac{100 - 9,81 \cdot 1,2}{1 \cdot 2^2}} \cdot \frac{9 \cdot 1}{2 \cdot 0,1}$$

$$P_0 = 40,345 \text{ tonf}$$

★ SE OBTIENE UN RESULTADO SIMILAR
A LA PARTE a)

Ecuación de movimiento

$$m \ddot{u} + k u = \frac{P_0}{t_0} \cdot t \quad [0 - t_0]$$

Solución: INTEGRAL DE DUKERMEZ

$$u(t) = \frac{1}{m \omega_n} \int_0^t p(\tau) \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau$$

$$= \frac{1}{m \omega_n} \int_0^t \frac{P_0}{t_0} \tau \sin[\omega_n(t-\tau)] d\tau$$

Sea $x = \omega_n \cdot (t - \tau)$

$$\Rightarrow \tau = t - \frac{x}{\omega_n} \quad d\tau = -\frac{1}{\omega_n} dx$$

$$\tau = 0 \Rightarrow x = \omega_n \cdot t$$

$$\tau = t \Rightarrow x = 0$$

$$u(t) = \frac{P_0}{m \omega_n^2 t_0} \int_{\omega_n t}^0 \left(t - \frac{x}{\omega_n} \right) \sin(x) \cdot -\frac{1}{\omega_n} dx$$

$$= \frac{P_0}{m \omega_n^2 t_0} \int_0^{\omega_n t} \left(t - \frac{x}{\omega_n} \right) \cdot \sin x \, dx$$

$$= \frac{P_0}{m \omega_n^2 t_0} \left[\underbrace{t \int_0^{\omega_n t} \sin x \, dx}_{a^*} - \underbrace{\frac{1}{\omega_n} \int_0^{\omega_n t} x \sin x \, dx}_{b^*} \right]$$

$$a^* = t \cdot \left(-\cos x \Big|_0^{\omega_n t} \right) = t \cdot (-\cos \omega_n t + 1)$$

$$= t - t \cos \omega_n t$$

$$b^* = \frac{1}{\omega_m} \int_0^{\omega_m t} x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{\omega_m} \left[-x \cos x + \operatorname{sen} x \right]_0^{\omega_m t}$$

$$= \frac{1}{\omega_m} \left[-\omega_m t \cdot \cos \omega_m t + \operatorname{sen} \omega_m t \right]$$

$$= -t \cos \omega_m t + \frac{1}{\omega_m} \operatorname{sen} \omega_m t$$

$$u(t) = \underbrace{\frac{P_0}{m \omega_m^2}}_k t_0 \left[t - t \cos \omega_m t + t \cos \omega_m t - \frac{1}{\omega_m} \operatorname{sen} \omega_m t \right]$$

$$u(t) = \frac{P_0}{k} \left[\frac{t}{t_0} - \frac{\operatorname{sen} \omega_m t}{t_0 \cdot \omega_m} \right]$$

EN PRIMERA INSTANCIA, SE DETERMINA UN MÁXIMO DE LA FUNCIÓN PARA $t \in [0, t_0]$

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{P_0}{k} \left[\frac{1}{t_0} - \frac{\omega_m \cos \omega_m t}{t_0 \omega_m} \right] \\ &= \frac{P_0}{k} \left[\frac{1}{t_0} - \frac{\cos \omega_m t}{t_0} \right] \\ &= \frac{P_0}{k t_0} [1 - \cos(\omega_m t)] \end{aligned}$$

↳ máximo en $\cos(\omega_m t) = 1$

$$\Rightarrow \omega_m t = 2n\pi$$

$$t = \frac{2n\pi}{\omega_m}$$

$$n = 1, \dots$$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow t_{\max} \frac{2\pi}{10} = 0,62 \text{ s}$$

↳ No hay máximo en la parte

EVALUAMOS $u(t_0)$ y $\dot{u}(t_0)$ PARA
USAR COMO CONDICIÓN INICIAL EN FASE II

$$u(t_0) = \frac{P_0}{k} \left[\frac{t_0}{t_0} - \frac{\sin \omega_n t_0}{t_0 \cdot \omega_n} \right]$$

$$u(t_0) = \frac{10}{100} \left[1 - \frac{\sin(10 \cdot 0,15)}{10 \cdot 0,15} \right]$$

$$u(t_0) = 0,0335 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(t_0) &= \frac{P_0}{k t_0} [1 - \cos(\omega_n t_0)] \\ &= \frac{10}{100 \cdot 0,15} [1 - \cos(10 \cdot 0,15)] \end{aligned}$$

$$\dot{u}(t_0) = 0,6195 \text{ m/s}$$

RESOLVEMOS EN OSCILACIÓN LIBRE

AMPLITUD

$$u_{\max} = \sqrt{u(t_0)^2 + \left[\frac{\dot{u}(t_0)}{\omega_n} \right]^2}$$

$$= \sqrt{0,0335^2 + \left[\frac{0,6195}{10} \right]^2}$$

$$u_{\max} = 0,0704 \text{ m}$$

SE PRODUCE
EN FASE II

$$b) T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{10} = 0,62 \text{ s}$$

$$t_0 = 0,15 \text{ s}$$

$$\frac{0,15}{0,62} < \frac{1}{4} \Rightarrow \text{OK SUPONER IMPULSO}$$

$$\dot{v}(t_0) = \int_0^{t_0} \frac{P(t)}{m} dt$$

$$= \int_0^{t_0} \frac{P_0}{t_0} \cdot \frac{t}{m} dt$$

$$= \frac{P_0}{t_0 \cdot m} \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^{t_0}$$

$$= \frac{P_0}{t_0 \cdot m} \cdot \frac{t_0^2}{2} = \frac{P_0 t_0}{2m} = \frac{10 \cdot 0,15}{2 \cdot 1} = 0,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

RESPUESTA EN FASE II

$$u(t) = \frac{u_0}{\omega_n} \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

$$u(t) = \frac{0,75}{10} \sin(10t)$$

$$u_{\max} = 0,075 \text{ m}$$

°° Se observa máximo símil
a la solución por duhamel.