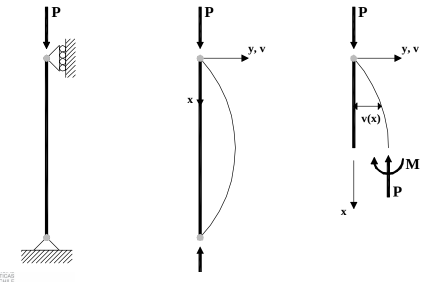
Columnas Esbeltas

– Pandeo de Columnas

- Columna elástica con carga axial (Euler, 1759).
- Supuestos:
  - Columna rotulada
  - Carga axial pura (sin flexión)
  - Columna sin imperfecciones
  - Material lineal elástico
  - Pandeo en ejes principales sin torsión



Para pequeñas deformaciones:

$$\frac{d^2v}{dx^2} \approx \frac{M}{EI}$$

Del equilibrio,

$$M = -P \cdot v(x)$$

Así, $\dfrac{d^2v}{dx^2} = \dfrac{-P \cdot v(x)}{EI}$

Columnas Esbeltas

– Pandeo de Columnas

Ecuación diferencial

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI} \cdot v = 0$$

re-escrita como:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \lambda^2 \cdot v = 0 \qquad \lambda^2 = P/EI$$

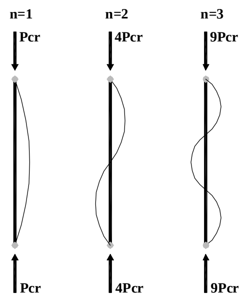
que tiene solución,

$$v(x) = A \cdot \sin(\lambda x) + B \cdot \cos(\lambda x)$$

Usando las condiciones de borde

$$v(x=0) = A \cdot \sin(0) + B \cdot (1) = 0 \quad \Rightarrow B = 0$$

$$v(x=L) = A \cdot \sin(\lambda L) = 0 \quad \begin{array}{l} \Rightarrow A = 0 \text{ (solución trivial)} \\ \text{ó } A \neq 0 \Rightarrow \sin(\lambda L) = 0 \end{array}$$



$$\Rightarrow \lambda L = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots n\pi$$

Así, $\lambda L = n\pi$ n=1 to ∞

$$\Rightarrow P = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \cdot EI \qquad \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L^2} \quad \text{(n=1)}$$

Ingeniería Civil

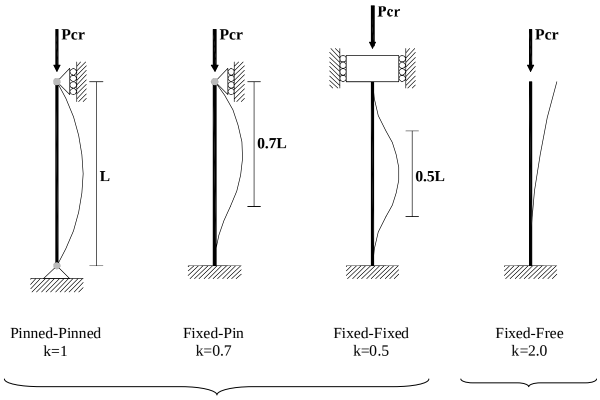
Pandeo de Columnas

– Caso general (sólo carga axial)

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(kL)^2}$$

kL = longitud efectiva
definida entre puntos
de inflexión (i.p.)

-Carga axial crítica (P_{cr}) para material lineal elástico
-Elementos no arriostrados lateralmente tienen menor capacidad que elementos arriostrados



Elemento arriostrado lateralmente

Elemento **NO** arriostrado lateralmente

Pandeo de Columnas

– Caso general
(sólo carga axial)

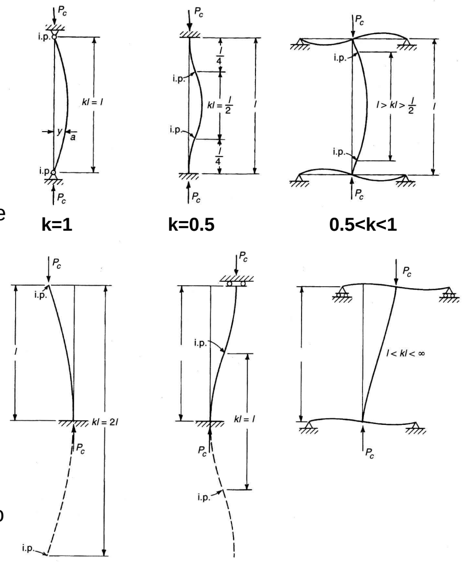
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(kL)^2}$$

kL = longitud efectiva
definida entre puntos
de inflexión (i.p.)

-Carga axial crítica (P_{cr})
para material lineal elástico
-Elementos no arriostrados lateralmente tienen menor capacidad que elementos arriostrados

Elemento arriostrado lateralmente

Elemento No arriostrado lateralmente



k=1 k=0.5 0.5<k<1

k=2 k=1 1<k<∞

Pandeo de Columnas

– Carga axial y flexión

$$M = M_0 + P\Delta$$

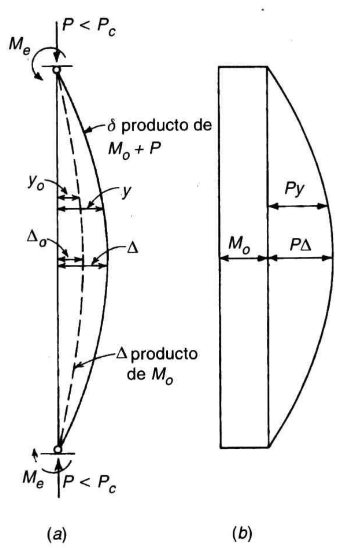
M_o = momento aplicado (1er orden)
Py = momento de segundo orden
Δ = deflexión total de la columna
Δ_o = deflexión de la columna debido al momento M_0

Se puede demostrar que,

$$\Delta = \Delta_0 \left(\frac{1}{1 - P/P_{cr}} \right)$$

De la misma forma,

$$M_{\max} \approx M_0 \left(\frac{1}{1 - P/P_{cr}} \right)$$



Pandeo de Columnas

– Carga axial y flexión

$$M = M_0 + P\Delta = M_0 + P(\Delta_o + \Delta_a)$$

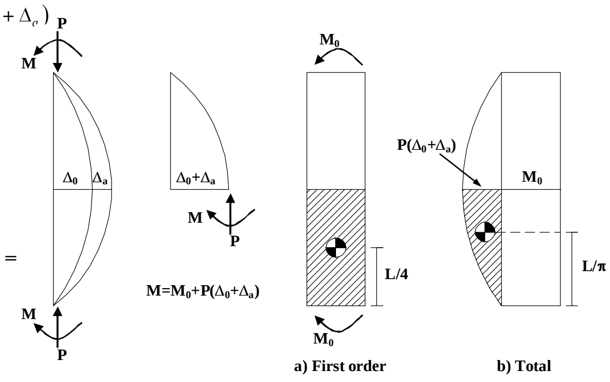
1er orden

$$\Delta_0 = \left(\frac{M_0}{EI} \cdot \frac{L}{2} \right) \cdot \frac{L}{4} = \frac{M_0 \cdot L^2}{8 \cdot EI}$$

2º orden

$$\Delta_a = \left(\frac{P \cdot (\Delta_0 + \Delta_a)}{EI} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \right) \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{2}{\pi} =$$

$$= P \cdot \left(\frac{L^2}{\pi^2 \cdot EI} \right) \cdot (\Delta_0 + \Delta_a)$$



Pandeo de Columnas

– Carga axial y flexión

$$M = M_0 + P\Delta = M_0 + P(\Delta_o + \Delta_a)$$

Recordando, $P_{cr} = \dfrac{\pi^2 \cdot EI}{(k \cdot L)^2}$

Entonces para k=1,

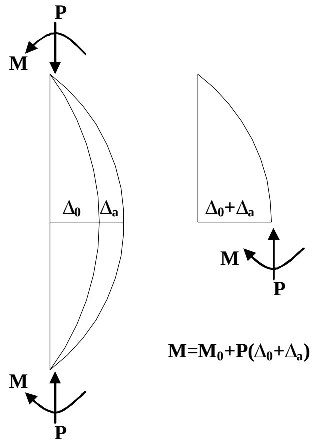
$$\Delta_a = P \cdot \left(\frac{L^2}{\pi^2 \cdot EI}\right) \cdot (\Delta_0 + \Delta_a) = \frac{P}{P_{cr}} \cdot (\Delta_0 + \Delta_a)$$

$$\Rightarrow \Delta_a = \Delta_0 \cdot \frac{P/P_{cr}}{1 - P/P_{cr}} = \Delta_0 \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \Delta = \Delta_a + \Delta_0 = \Delta_0 \cdot \frac{1}{1-\alpha}$$

donde, $\alpha = P/P_{cr}$

Factor de amplificación de la deformación



Pandeo de Columnas

– Carga axial y flexión

Además,

$$M = M_0 + P\Delta = M_0 + P(\Delta_o + \Delta_a) = M_0 + P \cdot \Delta_0 \cdot \frac{1}{1-\alpha}$$

Entonces para k=1, $P = \dfrac{P}{P_{cr}} \cdot P_{cr} = \alpha \cdot \dfrac{\pi^2 \cdot EI}{L^2}$

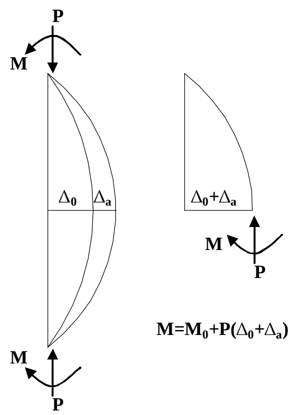
$$M = M_0 + \left(\alpha \cdot \frac{\pi^2 \cdot EI}{L^2}\right) \cdot \left(\frac{M_0 \cdot L^2}{8 \cdot EI}\right) \cdot \frac{1}{1-\alpha}$$

$$M = M_0 \cdot \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha}\right]$$

$$\Rightarrow M = M_0 \cdot \left(\frac{1 + 0.23 \cdot \alpha}{1-\alpha}\right) \approx M_0 \cdot \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$$

(para α pequeño)

Factor de amplificación del momento

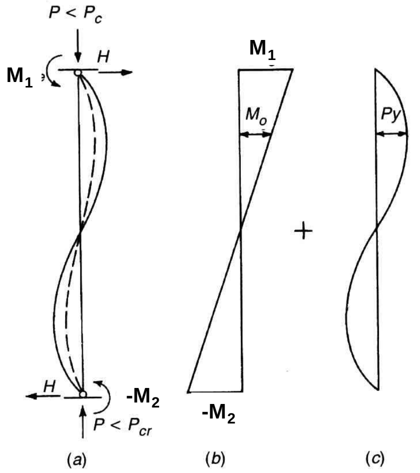


Pandeo de Columnas

– Carga axial y flexión

$$M = M_0 + Py$$

M_o = momento (1^{er} orden)
M_1 = momento extremo menor
M_2 = momento extremo mayor
Py = momento de segundo orden
y = deflexión total de la columna
y_o = deflexión de la columna debido al momento aplicado



Se puede demostrar que,

$$y = y_0\left(\frac{1}{1 - P/4P_{cr}}\right)$$

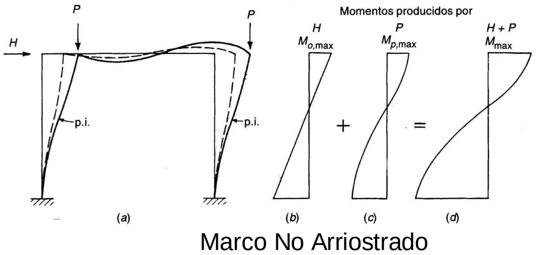
De la misma forma,

$$M_{\max} \approx M_0\left(\frac{c_m}{1 - P/P_{cr}}\right)$$

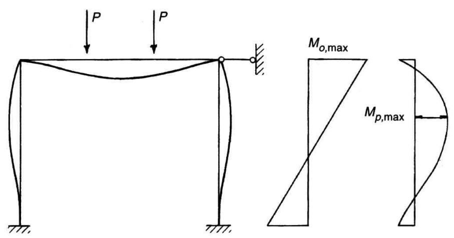
$$c_m = 0.6 + 0.4\frac{M_1}{M_2} \geq 0.4 \qquad \frac{M_1}{M_2}\begin{cases} < 0 \text{ (curvatura doble)} \\ > 0 \text{ (curvatura simple)} \end{cases}$$

Marcos

– Marco Arriostrado vs No Arriostrado



Marco No Arriostrado



Marco Arriostrado

-Sistemas estructurales con muros, núcleos de ascensores, etc., tienden a arriostrar los marcos

-Recomendación ACI para considerar piso arriostrado, cuando

$$Q = \frac{\Sigma P_u \Delta_0}{V_u l_c} \leq 0.05 \qquad \text{S.10.11.4.2}$$

ΣP_u = carga vertical mayorada total
V_u = cortante total del piso
Δ_0 = deflexión de entrepiso causada por V_u
l_c = longitud del elemento a compresión (centro a centro en nudos del marco)

Esbeltez Límite

- Los efectos de la esbeltez pueden ser despreciados si son menores a un valor límite

$$\frac{kl_u}{r} \leq \left(\frac{kl_u}{r}\right)_{\lim}$$

- Marco Arriostrado (S.10.12.2)

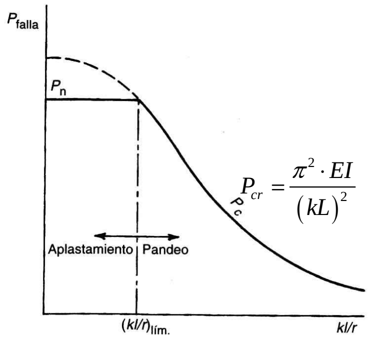
$$\frac{kl_u}{r} \leq 34 - 12\frac{M_1}{M_2}$$

con, $34 - 12\frac{M_1}{M_2} \leq 40$ $\quad \frac{M_1}{M_2}\begin{cases} < 0 \text{ (curvatura doble)} \\ > 0 \text{ (curvatura simple)} \end{cases}$

- Marco No Arriostrado (S.10.13.2)

$$\frac{kl_u}{r} \leq 22$$

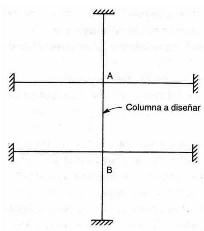
M_1 = momento extremo mayorado menor
M_2 = momento extremo mayorado mayor
k = factor de longitud efectiva
r = radio de giro de la columna
l_u = longitud no soportada (distancia libre entre losas, vigas, u otro soporte lateral)



$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \begin{cases} 0.3h \\ 0.25d \end{cases}$ Rectangular: h, dimensión en dirección en estudio
Circular: D, diámetro columna

(S.10.11.2)

Longitud Efectiva



- Cálculo del factor de longitud efectiva, k

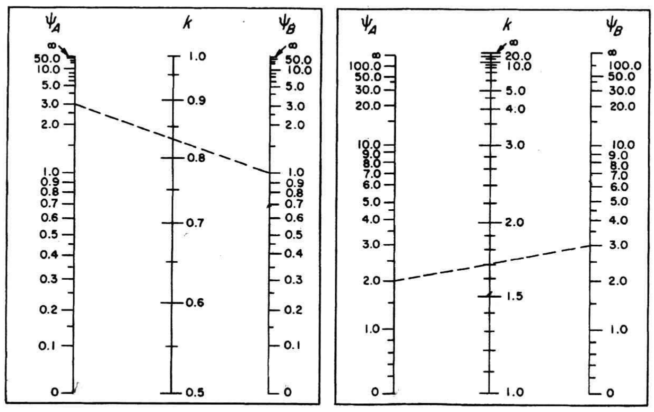
EI = rigidez (vigas o columnas)
L = luz centro a centro (vigas o columnas)

$$\psi = \frac{(\Sigma EI/l)_{columnas}}{(\Sigma EI/l)_{vigas}}$$

I =

Vigas	**$0.35I_g$**
Columnas	**$0.70I_g$**
Muro agrietado	**$0.35I_g$**
Muro no agriet.	**$0.70I_g$**
Losa y placa (plana)	**$0.25I_g$**

S.10.11.1



(*a*) Pórticos arriostrados (*b*) Pórticos no arriostrados

Marco Arriostrado

– Carga axial y flexión

$$M = M_0 + Py \quad \Rightarrow M_{\max} \approx M_0\left(\frac{c_m}{1-P/P_{cr}}\right) = \delta M_0$$

En términos de carga mayorada,

$$M_u = \delta_{ns} M_2, \text{ con } \delta_{ns} = \frac{c_m}{1-P_u/0.75P_{cr}} \geq 1$$

$$c_m = 0.6 + 0.4\frac{M_1}{M_2} \geq 0.4$$

(c_m=1 para elemento con carga transversal entre apoyos)

$$\frac{M_1}{M_2}\begin{cases} < 0 \text{ (curvatura doble)} \\ > 0 \text{ (curvatura simple)} \end{cases}$$

$$M_2 \geq P_u\left(15 + 0.03h\left[mm\right]\right) \text{ (en cada dirección)}$$

(para el cálculo de M_u)

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{\left(kl_u\right)^2} \qquad EI \approx \frac{0.4E_c I_g}{1+\beta_d}$$

$$\beta_d = \frac{\text{carga axial sostenida mayorada máxima}}{\text{carga axial mayorada total}}$$

M_u = momento resultante mayorado con efecto de esbeltez considerado
M_2 = momento extremo mayorado mayor
P_u = carga axial mayorada
P_{cr} = carga axial crítica de Euler
l_u = longitud no soportada (distancia libre entre losas, vigas, u otro soporte lateral)
$E_c I_g$ = rigidez sección bruta de hormigón

(S.10.12.3)