

Condensación Geométrica:

Podemos expresar las condensaciones geométricas como una serie de ecuaciones que relacionan los grados de libertad q_i :

$$G_{i1}q_1 + G_{i2}q_2 + \dots + G_{in}q_n = H_i \quad i = 1, \dots, r$$

En forma matricial

$$[G]_{rxn} \{q\}_{nx1} = \{H\}_{rx1}$$

En seguida, podemos separar los grados de libertad independientes, q_e , de los que serán subordinados, q_c , a través de las condensaciones geométricas. Suponiendo, por ahora que el vector H es un vector nulo,

$$[G_e \vdots G_c] \begin{Bmatrix} q_e \\ q_c \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Entonces,

$$\{q_e\} = -[G_e]^{-1}[G_c]\{q_c\} = \{\Gamma_{ec}\}\{q_c\}$$

A continuación, podemos particionar la matriz de rigidez considerando la misma separación de grados de libertad

$$\begin{Bmatrix} Q_e \\ Q_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ec} \\ K_{ce} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_e \\ q_c \end{Bmatrix}$$

De la segunda parte de la ecuación matricial

$$\{Q_c\} = [K_{ce}]\{q_e\} + [K_{cc}]\{q_c\} = ([K_{ce}]\{\Gamma_{ec}\} + [K_{cc}])\{q_c\}$$

de donde

$$[\underline{K}_{cc}] = ([K_{ce}]\{\Gamma_{ec}\} + [K_{cc}])$$

Sin embargo, la matriz $[\underline{K}_{cc}]$ no es simétrica, lo que complica la solución del sistema de ecuaciones. Para obtener una matriz simétrica consideremos las fuerzas adicionales generadas por Q_e en los grados de libertad independientes

$$\{Q_{ce}\} = \{\Gamma_{ec}\}^T \{Q_e\}$$

Entonces, las fuerzas totales efectivas en los grados de libertad independientes son

$$\{Q_c\} = \{Q_c\} + \{Q_{ce}\}$$

Remplazando en esta ecuación las ecuaciones anteriores

$$\{Q_c\} = [\underline{K}_{cc}]\{q_c\} + \{\Gamma_{ec}\}^T \{Q_e\}$$

y sacando $\{Q_e\}$ de la primera parte de la ecuación matricial

$$\{Q_c\} = ([K_{ce}]\{\Gamma_{ec}\} + [K_{cc}])\{q_c\} + \{\Gamma_{ec}\}^T([K_{ee}]\{q_e\} + [K_{ec}]\{q_c\})$$

$$\{Q_c\} = ([K_{ce}]\{\Gamma_{ec}\} + [K_{cc}] + \{\Gamma_{ec}\}^T[K_{ee}]\{\Gamma_{ec}\} + [K_{ec}])\{q_c\}$$

Barra con Extremos Rígidos:

Primero separemos los grados de libertad de la barra con extremos rígidos en grados de libertad externos, r_c , y grados de libertad internos, r_e .

Podemos encontrar una matriz T tal que

$$r_e = T r_c$$

Además, para la longitud flexible tenemos que

$$R_e = a^T k a r_e$$

y vamos a mostrar que

$$R_c = T^T R_e$$

Entonces

$$R_c = (aT)^T k (aT) r_c$$

Lo único que nos falta entonces es encontrar la matriz T . Veamos el extremo 1-i de la barra (ver clase). Usando las ecuaciones del campo de desplazamientos en un sólido rígido y suponiendo pequeñas deformaciones

$$r_{e1} = r_{c1} - r_{c3} \cdot L_i \sin \phi_i$$

$$r_{e2} = r_{c2} + r_{c3} \cdot L_i \cos \phi_i$$

$$r_{e3} = r_{c3}$$

Similarmente, en el otro extremo

$$r_{e4} = r_{c4} + r_{c6} \cdot L_j \sin \phi_j$$

$$r_{e5} = r_{c5} - r_{c6} \cdot L_j \cos \phi_j$$

$$r_{e6} = r_{c6}$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} r_{e1} \\ r_{e2} \\ r_{e3} \\ r_{e4} \\ r_{e5} \\ r_{e6} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -L_i \sin(\phi_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L_i \cos(\phi_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & L_j \sin(\phi_j) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L_j \cos(\phi_j) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_{c1} \\ r_{c2} \\ r_{c3} \\ r_{c4} \\ r_{c5} \\ r_{c6} \end{pmatrix}$$

La transformación para las fuerzas se obtiene aplicando equilibrio en los extremos rígidos.

$$R_{c1} = R_{e1}$$

$$R_{c2} = R_{e2}$$

$$R_{c3} = -R_{e1} \cdot L_i \sin \phi_i + R_{e2} \cdot L_i \cos \phi_i + R_{e3}$$

$$R_{c4} = R_{e4}$$

$$R_{c5} = R_{e5}$$

$$R_{c6} = R_{e4} \cdot L_j \sin \phi_j - R_{e5} \cdot L_j \cos \phi_j + R_{e6}$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} R_{c1} \\ R_{c2} \\ R_{c3} \\ R_{c4} \\ R_{c5} \\ R_{c6} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L_i \sin(\phi_i) & L_i \cos(\phi_i) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_j \sin(\phi_j) & -L_j \cos(\phi_j) & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} R_{e1} \\ R_{e2} \\ R_{e3} \\ R_{e4} \\ R_{e5} \\ R_{e6} \end{pmatrix}$$

Para el caso de una barra horizontal

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$