

CI41A – Hidráulica – Control 3
Martes 17 de Noviembre 2009

Problema N°1

Se tiene un canal como el de la Figura 1, compuesto por dos tramos: el tramo 1 es de sección trapezoidal, ancho basal b_1 , pendiente de fondo i_1 y coeficiente de Manning n_1 ; mientras que el tramo 2 es de sección rectangular, ancho basal b_2 , pendiente de fondo i_2 y coeficiente de Manning n_2 . El canal conduce un caudal Q_0 . Se está estudiando la construcción de un puente sobre el canal en el tramo 2, y usted ha sido designado para colaborar en el proyecto.

El tramo 1 se extiende infinitamente hacia aguas arriba, mientras que el tramo 2 se extiende indefinidamente hacia aguas abajo. El puente se instalaría sobre 3 apoyos, la separación entre éstos sería d y se encontrarían simétricamente distribuidos en la sección, como se indica en la Figura 1.

Usando los antecedentes entregados, se le solicita:

- Caracterizar las pendientes hidráulicas de cada tramo e indicar la posible existencia de resaltos.
- Calcular las alturas de escurrimiento en las secciones (1), (2), (3), (4), (5) y (6).
- Esquematizar los posibles ejes hidráulicos a desarrollarse en el canal.

Datos: $Q_0 = 2.0 \text{ m}^3/\text{s}$, $b_1 = 1.0 \text{ m}$, $k = 1.0$, $i_1 = 0.01$, $n_1 = 0.015$, $b_2 = 1.5 \text{ m}$, $i_2 = 0.0005$, $n_2 = 0.018$, $d = 0.4 \text{ m}$.

Indicación: Desprecie las pérdidas singulares en los cambios de sección. Suponga que los tramos (1)-(2) y (3)-(4) son suficientemente largos como para que en ellos se desarrolle completamente el eje hidráulico.

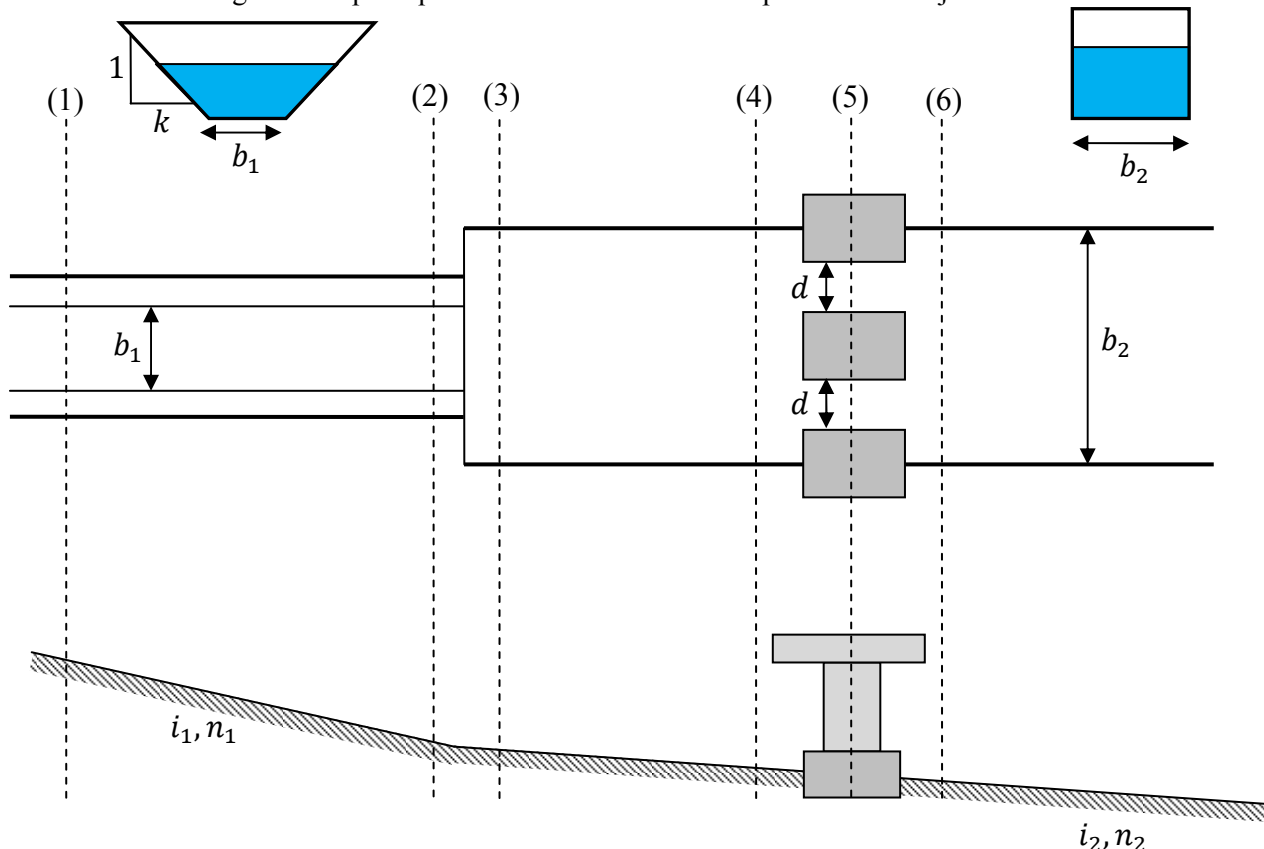


Figura N°1: Esquema canal Problema N°1

Problema N°2

Para unir dos embalses, que se encuentran a diferentes cotas sobre el nivel medio del mar, se construyó un canal rectangular de ancho b , pendiente i_1 , largo L_1 y coeficiente de rugosidad de Manning n_1 . Para poder llegar al embalse inferior se debió desarrollar un túnel en dos tramos, de igual sección rectangular, con ancho b y altura H . El primer tramo del túnel se encuentra excavado en el interior de una roca dañada, expuesta a altos niveles de meteorización, (baja resistencia) con pendiente i_2 , largo L_2 , coeficiente de rugosidad de Manning n_2 y coeficiente de fricción f . La segunda parte del túnel se encuentra excavado en una roca sana (buena resistencia), tiene pendiente i_3 , largo L_3 , coeficiente de rugosidad de Manning n_3 y coeficiente de fricción f . Tanto el tramo del canal como el primer tramo del túnel pueden considerarse suficientemente largos como para que en ellos se desarrolle completamente el eje hidráulico.

Considerando que el primer tramo del túnel puede presentar fallas si es que está sometido a altas presiones, se pide:

- Determinar la pendiente del primer tramo del túnel, i_2 , para que a lo largo de este tramo no se generen presiones internas mayores a la presión atmosférica, P_{atm} .
- Determinar las alturas características del flujo entre ambos embalses.
- Clasificar los tipos de ejes hidráulicos desarrollados a lo largo del canal y el túnel.

Datos: $\Delta h_T = 1.52 \text{ m}$; $\Delta h_B = 0.622 \text{ m}$; $i_1 = 0.0001$; $i_2 = ?$; $i_3 = 0.0015$; $n_1 = 0.014$; $n_2 = 0.020$; $n_3 = 0.025$; $b = 3.0 \text{ m}$; $H = 0.5 \text{ m}$; $f = 0.01$; $L_3 = 980 \text{ m}$

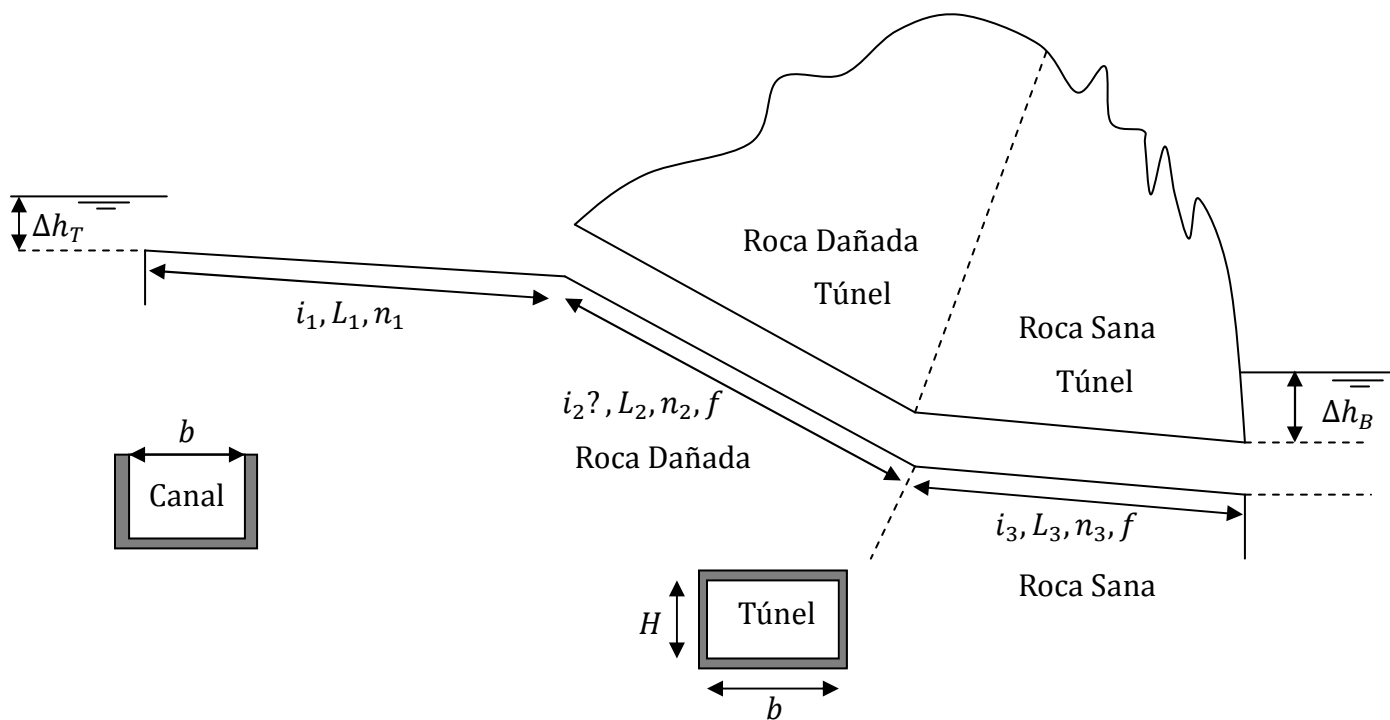


Figura N°2: Esquema del Problema N°2.

CI41A – Hidráulica – Pauta Control 3
Martes 17 de Noviembre 2009

Problema N°1

a. *Caracterizar las pendientes hidráulicas de cada tramo e indicar la posible existencia de resaltos.*

Para caracterizar las pendientes hidráulicas de cada tramo, hay que calcular la altura normal y compararla con la crítica:

Tramo 1: Sección trapecial

La altura normal se obtiene de resolver la ecuación de Manning:

$$\frac{Q_0 n_1}{\sqrt{i_1}} = A R h^{2/3} = \frac{(b_1 h_{n_1} + k h_{n_1}^2)^{5/3}}{(b_1 + 2 h_{n_1} \sqrt{1 + k^2})^{2/3}} \quad (1.1)$$

Evaluyendo, $h_{n_1} = 0.4638 \text{ m}$. La altura crítica se obtiene de la condición de crisis $Fr^2 = 1$:

$$Fr^2 = \frac{Q^2 l}{g \Omega^3} = \frac{Q_0^2 (b + 2 h c_1)}{g (b_1 h c_1 + k h c_1^2)^3} = 1 \quad (1.2)$$

Evaluyendo, $h_{c_1} = 0.6023 \text{ m}$. Luego, como $h_{n_1} > h_{c_1}$ el tramo está en pendiente fuerte.

Tramo 2: Sección rectangular

La altura normal se obtiene de resolver la ecuación de Manning para canal rectangular:

$$\frac{Q_0 n_2}{\sqrt{i_2}} = A R h^{2/3} = \frac{(b_2 h_{n_2})^{5/3}}{(b_2 + 2 h_{n_2})^{2/3}} \quad (1.3)$$

Evaluyendo, $h_{n_2} = 1.6659 \text{ m}$. La altura crítica se obtiene de la condición de crisis $Fr^2 = 1$:

$$h_{c_2} = \left(\frac{q_2^2}{g} \right)^{1/3} \quad (1.4)$$

Evaluyendo, $h_{c_2} = 0.5661 \text{ m}$. Luego, como $h_{n_2} > h_{c_2}$ el tramo está en pendiente suave. Para compatibilizar ambos tramos, debe existir un resalto, el cual puede ubicarse en el tramo 1, en el cambio de sección o en el tramo 2. La ubicación del resalto dependerá de las momentas de las secciones del canal.

b. Calcular las alturas de escurrimiento en las secciones (1), (2), (3), (4), (5) y (6).

Dado que el tramo 2 está en pendiente suave y se extiende indefinidamente hacia aguas abajo, se tiene altura normal en la sección (6). Para calcular la altura de escurrimiento en la sección (5), realizamos una igualdad de energía entre ambas secciones:

$$E_5 = E_6 \Rightarrow h_5 + \frac{q_p^2}{2gh_5} = h_6 + \frac{q_2^2}{2gh_6} \quad (1.5)$$

Donde $h_6 = h_{n_2}$, $q_2 = Q_0/b_2$ y $q_p = Q_0/2d$, pues la sección efectiva de escurrimiento en el puente es de ancho $2d$. Reemplazando los valores numéricos, se tiene que $E_5 = 1.6986 \text{ m}$ y $h_5 = 1.569 \text{ m}$. Debemos verificar que no exista crisis en el angostamiento producido por los apoyos del puente. En efecto, la energía en (5) es la energía normal, mayor a la energía crítica en el puente:

$$E_{c_p} = 1.5 h_{c_2} = 1.2911 \text{ m} \quad (1.6)$$

La altura de escurrimiento en la sección (4) también se obtiene igualando energía con la sección (5). Es fácil ver que $h_4 = h_6 = h_{n_2}$.

Para calcular la altura en (3), se tiene que las secciones (3) y (4) están lo suficientemente alejadas entre sí para que se desarrolle el eje hidráulico. Luego, la altura en (3) es la altura normal h_{n_2} .

Para determinar la altura en (2), igualamos energía en la sección (3), lo cual es posible pues despreciamos la pérdida singular por cambio de sección:

$$E_2 = E_3 \Rightarrow h_2 + \frac{Q_1^2}{2g(b_1 h_2 + k h_2^2)^2} = h_3 + \frac{q_2^2}{2gh_3} \quad (1.7)$$

Reemplazando los datos y tomando la solución subcrítica, se tiene que $h_2 = 1.689 \text{ m}$. Por otro lado, el tramo 1 está en pendiente fuerte, por lo que la altura en (1) es la altura normal de torrente $h_1 = h_{n_1}$. Para ver la ubicación del resalto, se deben analizar las momentas entre las secciones (1) y (2).

$$M_1 = \frac{b_1 h_1^2}{2} + \frac{k h_1^3}{3} + \frac{Q_0^2}{g(b_1 h_1 + k h_1^2)} = 0.742 \text{ m}^2 \quad (1.8)$$

$$M_2 = \frac{b_1 h_2^2}{2} + \frac{k h_2^3}{3} + \frac{Q_0^2}{g(b_1 h_2 + k h_2^2)} = 3.121 \text{ m}^2 \quad (1.9)$$

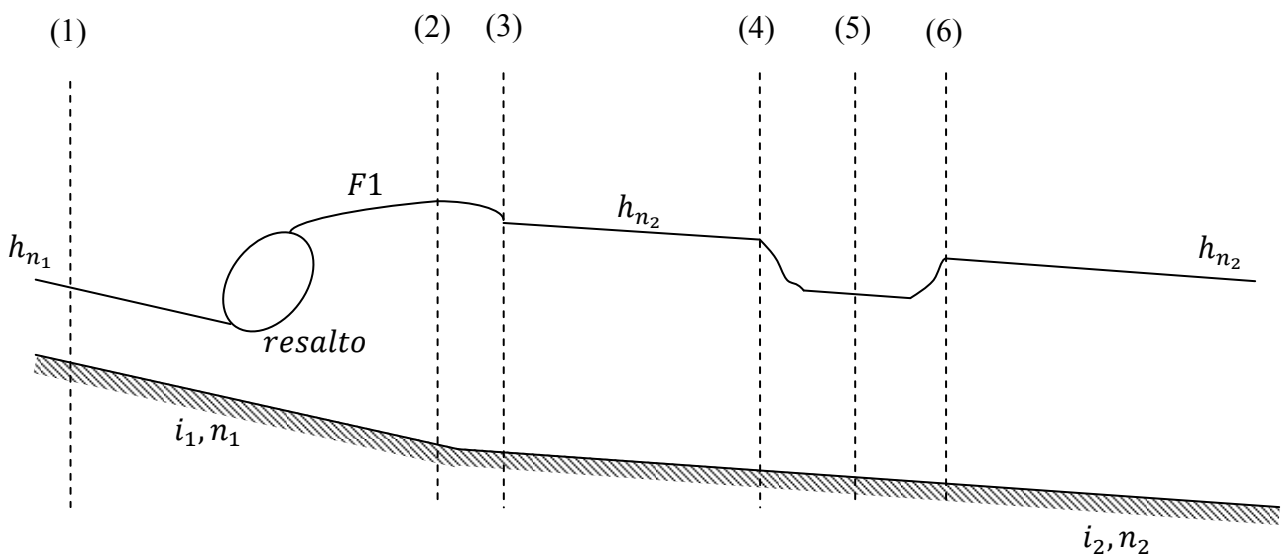
Luego, podemos concluir que el resalto se encuentra íntegramente ubicado en el tramo 1.

c. Esquematizar los posibles ejes hidráulicos a desarrollarse en el canal.

Para ver qué eje hidráulico se desarrolla, debemos analizar cuál es la altura conjugada del resalto, considerando que el tramo 1 viene con altura normal:

$$M_1 = \frac{b_1 h_r^2}{2} + \frac{k h_r^3}{3} + \frac{Q_0^2}{g(b_1 h_r + k h_r^2)} \quad (1.10)$$

Resolviendo, $h_r = 0.762 \text{ m}$. Luego, a partir de este valor de la altura conjugada, se desarrolla un eje F1 que empalma con la altura de la sección (2). Esquemáticamente:



También es posible suponer que aguas arriba de la sección (1), existe algún control hidráulico, por lo que se generará un F2 o un F3 antes de llegar al resalto, según el tipo de control supuesto.

Problema N°2

Se debe determinar el caudal que circula por el sistema. Se puede suponer que el canal tiene una pendiente suave, por lo que se tendría que en el embalse superior existe energía normal, luego:

$$\Delta h_T = \frac{Q^2}{2g(bh_{n1})^2} + h_{n1} ; \frac{Qn_1}{\sqrt{i_1}} = \frac{(bh_{n1})^{5/3}}{(b + 2h_{n1})^{2/3}} \quad (2.1)$$

de este par de ecuaciones se obtiene el caudal y la altura normal del canal:

$$Q = 2.65 \text{ m}^3/\text{s} ; h_{n1} = 1.50 \text{ m} \quad (2.2)$$

Para corroborar esta hipótesis debemos analizar la altura crítica desarrollada para estas condiciones hidráulicas:

$$h_c = \left\{ \frac{Q^2}{gb^2} \right\}^{1/3} = 0.43 \text{ m} \quad (2.3)$$

de esta forma se obtiene que $h_{n1} > h_c$ por lo que la hipótesis de que el tramo en canal tiene una pendiente hidráulica suave se valida.

Se debe analizar cuál es la condición hidráulica desarrollada en el primer tramo del túnel. Un primer análisis es determinar la altura normal en esta parte, de esta forma podemos determinar el régimen que tendrá el flujo:

$$\frac{Qn_2}{\sqrt{i_2}} = \frac{(bh_{n2})^{5/3}}{(b + 2h_{n2})^{2/3}} \quad (2.4)$$

Como no se conoce i_2 se debe determinar la altura h_{n2} a partir de una condición de borde impuesta desde aguas abajo. Si suponemos que la pendiente es fuerte, ésta se alcanzará aguas abajo del tramo. Por otra parte, se busca que este tramo del túnel funcione como acueducto. El ancho del túnel es el mismo que el ancho del canal, b , entonces la altura crítica no cambia, y en consecuencia se debe cumplir que $h_c > h_{n2}$. Esto provoca que en la unión del canal con el túnel (en el cambio de pendiente) exista crisis.

Bajo esta situación, el primer tramo del túnel no se encontraría en presión, por lo que se estaría cumpliendo las condiciones de diseño de la obra, sin embargo, se debe analizar la hidráulica desde aguas abajo, específicamente la influencia del embalse inferior sobre el segundo tramo del túnel.

Si analizamos el segundo tramo del túnel debemos ver si el tramo se encuentra en presión, para eso podemos partir estudiando la altura de escurrimiento que tendría un flujo con el nivel de energía del embalse inferior:

$$E_{\Delta h_b} = \frac{Q^2}{2g(bh_{ft})^2} + h_{ft} = H + \Delta h_b \rightarrow h_{ft} = \begin{cases} 0.21 \text{ m} \\ 1.10 \text{ m} \end{cases} \quad (2.5)$$

La altura de torrente no tiene mucho sentido puesto que la altura del túnel es $H = 0.5 \text{ m}$, y el agua está a Δh_b sobre la clave del túnel. Esto indica que al menos una parte del túnel se encuentra en presión, luego, se puede plantear nuevamente la ecuación de energía específica:

$$E_{\Delta h_b} = \frac{Q^2}{2g(bH)^2} + \frac{P_t}{\gamma} \rightarrow \frac{P_t}{\gamma} = H_{Pft2} = 0.96 \text{ m} \quad (2.6)$$

Como buscamos la pendiente mínima del primer tramo del túnel, para que no se genere flujo en presión sobre éste, debemos analizar la energía al inicio del segundo tramo del túnel, luego:

$$B_{it2} = B_{ft2} + \Lambda_f \rightarrow E_{it2} + i_3 L_3 = E_{ft2} + J L_3 \quad (2.7)$$

donde J se determina a través de la siguiente ecuación:

$$J = \frac{f}{4R_h} \frac{Q^2}{2g(bH)^2} \quad (2.8)$$

y el radio hidráulico es $R_h = (bH)/(2b + 2H)$, suponiendo que el tramo 2 del túnel se encuentra en presión, lo cual debería ser corroborado posteriormente, luego, podemos determinar la energía específica y la altura de presión:

$$\frac{Q^2}{2g(bH)^2} + H_{pit2} + i_3 L_3 = \frac{Q^2}{2g(bH)^2} + H_{pft2} + J L_3 \quad (2.9)$$

$$H_{pit2} = H_{pft2} + L_3(J - i_3) = 1.31 \text{ m} \quad (2.10)$$

Cómo $H_{pit2} > 0.5$ esta parte del túnel está en presión. Con esta altura de presión calculamos la momenta existente justo aguas abajo del primer tramo del túnel e imponemos la condición límite de que ésta se encuentra en equilibrio con la momenta de aguas arriba, caracterizada por la altura normal del primer tramo del túnel:

$$m(h_{n2}) = \frac{Q^2}{gh_{n2}b^2} + \frac{h_{n2}^2}{2} = m_{it2} = \frac{Q^2}{gHb^2} + \frac{H_{pit2}^2}{2} = 1.02 \text{ m}^2 \quad (2.11)$$

Luego, $h_{n2} = 0.08 \text{ m}$, entonces, de la ecuación (2.4) obtenemos la pendiente del tramo 1 del túnel:

$$i_2 = \frac{Q^2 n_2^2 (b + 2h_{n2})^{4/3}}{(bh_{n2})^{10/3}} = 1.6 \quad (2.12)$$

Si bien la solución matemáticamente existe, no podemos darle un sentido físico directo.

Las alturas características son h_{n1} ; h_{n2} ; h_c ; H_{pit2} y H_{pft2} .

