Sem. Primavera 2009
Auxs.: Carlos Rozas
Hugo Ulloa

CI41A – Auxiliar 5
Viernes 16 de Octubre 2009

Problema N°1.

El canal rectangular de la figura tiene tres secciones distintas, cuyos anchos son b_1, b_2 y b_3, terminando en una caída. El caudal que escurre es Q. En el tramo de ancho b_1 se tiene una grada, la que puede ser de subida ($x > 0$) o de bajada ($x < 0$). En la sección de ancho b_3 se tiene una grada de altura a. Despreciando todo tipo de pérdidas en el sistema, se pide:

a. Determinar el valor de x_{lim} a partir del cual la grada en el tramo de ancho b_1 condiciona la altura en la sección (2).
b. Graficar en un diagrama $h - E$ las alturas en las secciones (1), (2) y (3) en función de x. Cubrir el rango $x < x_{lim}$, abarcando todos los casos conceptuales posibles.
c. Determinar las alturas de escurrimiento en las secciones (1), (2) y (3) para los siguientes valores de x:

- $x = -0.25\ [m]$
- $x = 0.30\ [m]$
- $x = 0.60\ [m]$

Datos: $Q = 2.6\ [m^3/s]$; $b_1 = 2.2\ [m]$; $b_2 = 3.2\ [m]$; $b_3 = 1.2\ [m]$; $a = 50\ [cm]$

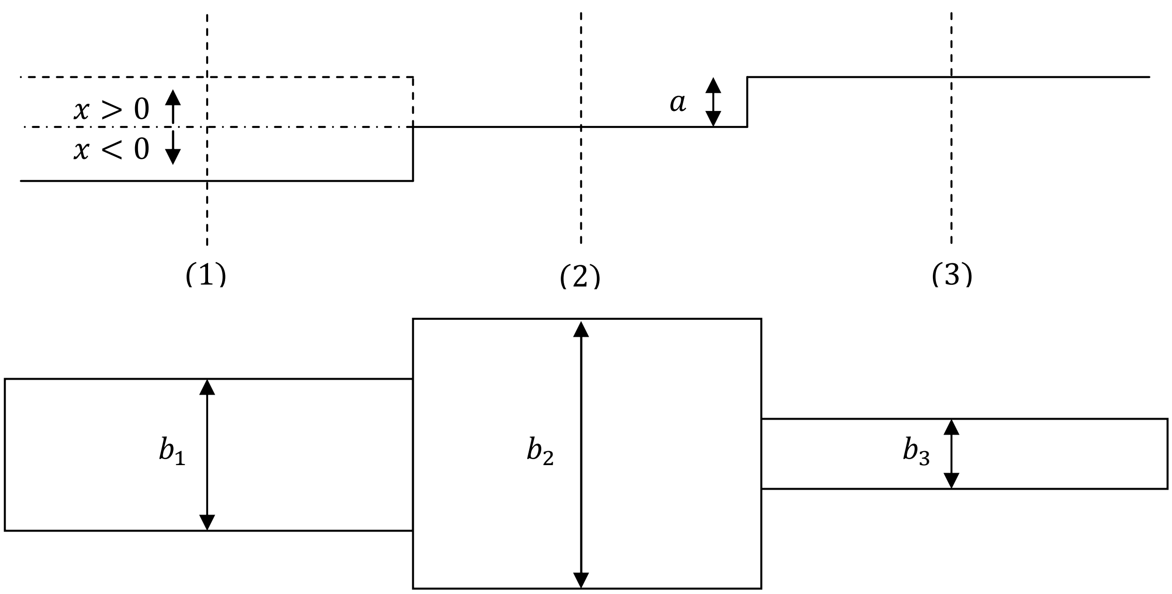


Figura 1: Problema N°1

Problema N°2

Considere el canal rectangular muy largo de la figura, de ancho basal $b = 0.5\ [m]$, que conduce un caudal Q evacuado desde el embalse de cota constante. El desnivel entre embalse y cota de fondo del canal a la entrada es $\Delta h = 0.5\ [m]$. Considere que la altura uniforme en el canal es h_n. Determine el caudal evacuado y la altura en la sección de entrada para los casos $h_n = 0.3\ [m]$ y $h_n = 0.45\ [m]$, respectivamente.

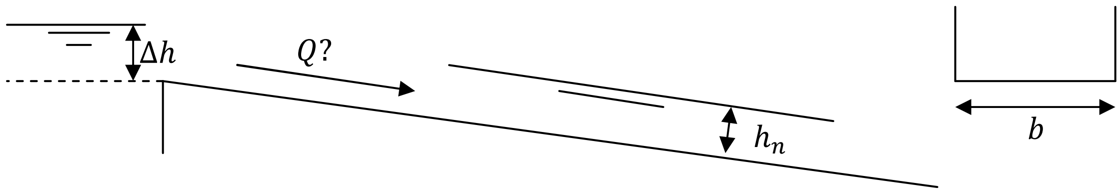


Figura 2: Problema 2

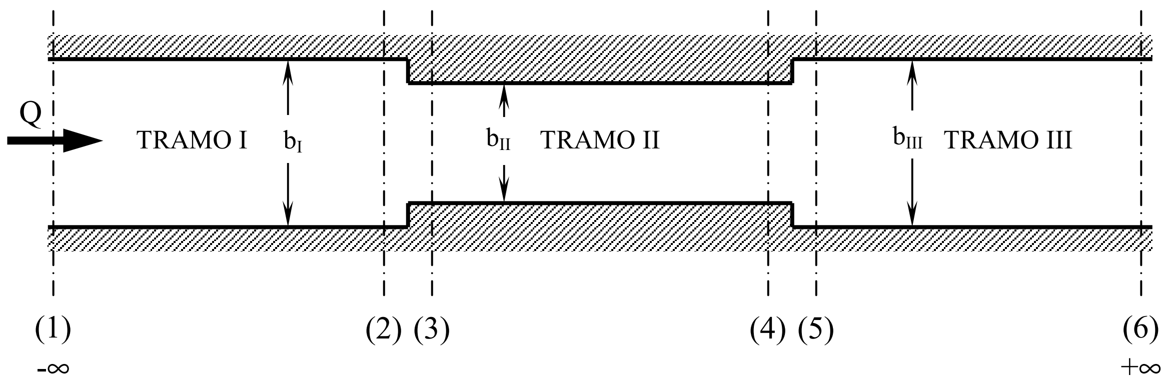
Problema N°3 (Propuesto)

Un canal horizontal de sección rectangular infinitamente largo tiene un tramo más estrecho, como se esquematiza en la figura. Por el canal escurre un caudal de 0,9 m^3/s. Considerando que no existe pérdidas de energía friccionales ni debidas a los cambios de sección del canal, y los anchos que se dan a continuación, se pide determinar las alturas de escurrimiento en las secciones (1), (2), …., (6) para las siguientes condiciones:

a. El flujo está condicionado desde aguas arriba (C.B. en $x \to -\infty$) con una energía específica E_0 = 0,65 m y no existe ninguna influencia de aguas abajo en el tramo III del canal.

b. El flujo está condicionado desde aguas abajo (C.B. en $x \to +\infty$) con una energía específica E_0 = 0,65 m y no existe ninguna influencia de aguas arriba en el tramo I del canal.

Datos: $b_I = b_{III}$ = 1,30 m b_{II} = 0,75 m



Referencias:

1. Control N°2, Problema N°1 – Primavera 2006. Prof. Y. Niño. Auxs. A. Edwards & C. Godoy.
2. Ejercicio N°3, Problema N°2 - Primavera 2006. Prof. Y. Niño. Auxs. A. Edwards & C. Godoy.
3. Control N°2, Problema N°2 – Otoño 2008. Profs. A. Tamburrino & C. Godoy.

CI41A – Pauta Auxiliar 5
Viernes 16 de Octubre 2009

Pregunta N°1

El caudal de escurrimiento a través de las diferentes secciones es Q. Por lo general, cuando se conoce el ancho de la sección de un canal se trabaja con el caudal unitario q. En este caso se tendrán tres diferentes caudales unitarios:

$$q_i = Q/b_i \tag{1.1}$$

Por otra parte, para que la grada condicione la altura de escurrimiento de una sección debe ocurrir crisis sobre ésta. En consecuencia, es necesario plantear la condición de energía crítica en el sistema, B_c. Bajo esta condición se debe plantear la siguiente ecuación:

$$E_i = \frac{q_i^2}{2gh_i^2} + h_i \tag{1.2}$$

Es importante notar que esta ecuación caracteriza la energía específica del sistema, no consideran la cota sobre algún datum. Ahora bien, para determinar la energía crítica debemos analizar la variable del sistema. En este caso, el caudal es constante, y determina un caudal unitario para cada sección, por lo que nuestra variable es la altura de escurrimiento h_i, que caracteriza tanto a la energía cinética como a la energía potencial del flujo. Luego, la energía crítica o mínima está dado por la solución del problema de optimización siguiente:

$$\frac{\partial E_i}{\partial h_i} = 0 \tag{1.3}$$

De esta última ecuación se deriva la siguiente expresión de altura crítica para un canal específicamente rectangular:

$$h_{ic} = \left\{\frac{q_i^2}{g}\right\}^{1/3} \tag{1.4}$$

Despejando $q_i = q_i(h_{ic})$ de la ecuación (1.4), y reemplazando este término en la ecuación de energía específica se obtiene una expresión para ésta en función de solamente la altura crítica del flujo, para un caudal unitario específico:

$$E_{ic} = \frac{3}{2}h_{ic} = \frac{3}{2}\left\{\frac{q_i^2}{g}\right\}^{1/3} \tag{1.5}$$

Ahora podemos analizar las diferentes condiciones límites.

a. Para que la grada condicione la altura de escurrimiento de la sección (2), debe ocurrir crisis sobre ésta. Además, en la sección (3) se tiene caída al final, con lo que se tiene una condición de crisis en la sección (3). En esta situación se tiene que, si no consideramos pérdidas en el sistema, los Bernoulli se conservan por lo que se puede plantear la siguiente ecuación:

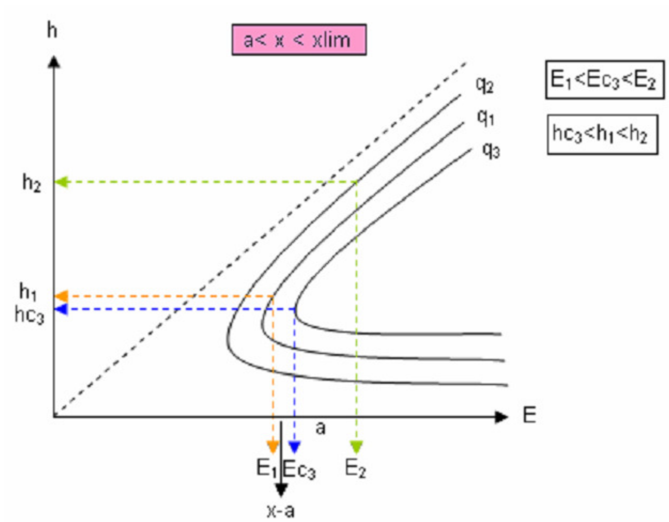
$$B_1 = B_3 \rightarrow E_{c1} + x_{lim} = E_{c3} + a \tag{1.6}$$

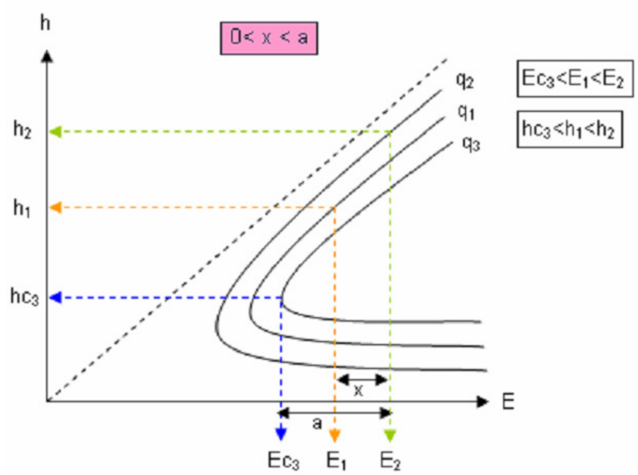
De esta ecuación se despeja la altura de la grada límite tal que la sección (2) se vea condicionada por ésta:

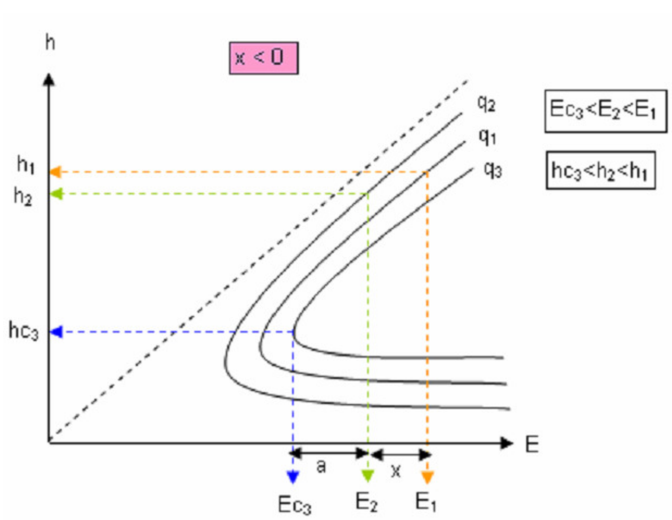
$$x_{lim} = E_{c3} - E_{c1} + a = 0.890\ [m] \tag{1.7}$$

b. A continuación se analizan las alturas en las secciones (1), (2) y (3) en función de x. Es posible caracterizar tres rangos:

$$\begin{gathered} x \in (a, x_{lim}] \\ x \in (0, a) \\ x < 0 \end{gathered} \tag{1.8}$$







c. Se determinará las alturas de escurrimiento en las secciones (1), (2) y (3) para tres diferentes valores de x:

Para los tres diferentes casos se tiene que la altura en la sección (3) está caracterizada por la caída, generando la condición de crisis, luego:

$$h_3 = h_{c3} = 0.782\ [m] \rightarrow E_3 = E_{c3} = \frac{3}{2}h_{c3} = 1.174\ [m] \tag{1.9}$$

A partir de este resultado podemos obtener la energía específica en (2):

$$E_2 = E_{c3} + a = 1.674\ [m] \tag{1.10}$$

Resolviendo la ecuación de tercer grado se obtienen tres soluciones, donde dos de ellas son positivas y una negativa. La solución negativa no tiene sentido físico, y las soluciones positivas indican las posibles alturas reales, dependiendo del régimen del flujo (sub-crítico o súper-crítico).

$$E_2 = \frac{q_2^2}{2gh_2^2} + h_2 = 1.674\ [m] \rightarrow h_2 = \begin{cases} 1.662\ [m]\ solución\ sub - crítica \\ 0.149\ [m]\ solución\ súper - crítica \\ -0.137\ solución \text{ sin } sentido\ físico \end{cases} \tag{1.11}$$

En esta situación, como se tiene una crisis en la sección (3), se tiene un cambio de régimen, por lo que en la sección (2) se debe tener un régimen sub-crítico, y en consecuencia $h_2 = 1.662\ [m]$.

Luego, podemos analizar los tres posibles valores de x:

- $x = -0.25\ [m]$

Para esta situación podemos aplicar directamente la ecuación (1.6):

$$E_1 + x = E_{c3} + a \tag{1.12}$$

luego,

$$E_1 = E_{c3} + a - x = 1.924\ [m] \tag{1.12}$$

$$E_1 = \frac{q_2^2}{2gh_1^2} + h_1 = 1.924\ [m] \rightarrow h_1 = \begin{cases} 1.904\ [m]\ solución\ sub - crítica \\ 0.204\ [m]\ solución\ súper - crítica \\ -0.184\ solución \text{ sin } sentido\ físico \end{cases} \tag{1.13}$$

Se debe tener un régimen sub-crítico, y en consecuencia $h_1 = 1.904\ [m]$.

- $x = 0.30\ [m]$

$$E_1 = E_{c3} + a - x = 1.374\ [m] \tag{1.14}$$

$$E_1 = \frac{q_2^2}{2gh_1^2} + h_1 = 1.374\ \ [m] \rightarrow h_1 = \begin{cases} 1.334\ [m]\ solución\ sub - crítica \\ 0.252\ [m]\ solución\ súper - crítica \\ -0.212\ solución \text{ sin } sentido\ físico \end{cases} \tag{1.15}$$

Se debe tener un régimen sub-crítico, y en consecuencia $h_1 = 1.334\ [m]$.

- $x = 0.60\ [m]$

$$E_1 = E_{c3} + a - x = 1.074\ [m] \tag{1.16}$$

$$E_1 = \frac{q_2^2}{2gh_1^2} + h_1 = 1.074\ \ [m] \rightarrow h_1 = \begin{cases} 1.003\ [m]\ solución\ sub - crítica \\ 0.304\ [m]\ solución\ súper - crítica \\ -0.234\ solución \text{ sin } sentido\ físico \end{cases} \tag{1.17}$$

Se debe tener un régimen sub-crítico, y en consecuencia $h_1 = 1.003\ [m]$.

Problema N°2

- Para el primer caso, $h_n = 0.3\ [m]$

De la expresión de la energía específica sabemos que:

$$E = \frac{Q^2}{2g\Omega^2(h)} + h \tag{2.1}$$

Donde $\Omega = bh$. Analizando la condición de energía crítica en el sistema se deriva la siguiente expresión:

$$\frac{\partial E}{\partial h} = -\frac{Q^2}{2g\Omega^3(h)}\frac{\partial \Omega}{\partial h} + 1 \tag{2.2}$$

desde donde podemos despejar h_c si igualamos a cero la ecuación (2.2)

$$\frac{\partial E}{\partial h} = -\frac{Q^2}{2g\Omega^3(h)}\frac{\partial \Omega}{\partial h} + 1 = 0 \rightarrow h_c = \left(\frac{Q^2}{b^2 g}\right)^{1/3} \tag{2.3}$$

Esta última expresión relaciona el caudal circulante con la altura crítica del flujo. Como se tienen dos incognitas, Q y h_c, se debe tomar algún supuesto en el problema. Una posibilidad es considerar que a la entrada del canal se genera crisis, con lo que se está suponiendo indirectamente que el flujo tiene régimen súper-crítico, puesto que éste tiende a su altura normal, y como no existe ninguna condición hidráulica que provoque un cambio de régimen (e.g. grada), $h_c > h_n$, luego se tiene lo siguiente:

$$E_c = \Delta h = 0.5\ [m] \tag{2.4}$$

Este supuesto debe ser corroborado, por lo que ahora debemos obtener la altura crítica derivada de este resultado:

$$h_c = \frac{2}{3}E_c = \frac{2}{3}\Delta h = 0.33\ [m] \tag{2.5}$$

Luego, podemos ver que $h_c > h_n$, por lo que se cumple el supuesto de la crisis a la entrada. En función de este resultado podemos obtener el flujo circulante por el canal:

$$Q = \sqrt{g h_c^3}\, b = 0.9 \left[\frac{m^3}{s}\right] \tag{2.6}$$

- Para el segundo caso, $h_n = 0.45\ [m]$

De la misma forma que en la parte anterior, y dado que h_n en este caso es de río, se deberá considerar que no existe crisis, sino que el escurrimiento toma altura normal en la entrada, con lo que la energía del escurrimiento normal será igual a la energía disponible en la entrada: $E_n = 0.5\ [m]$, y utilizando la ecuación la ecuación de energía, podemos despejar el caudal Q:

$$E_n = \frac{Q^2}{2gb^2h_n^2} + h_n \tag{2.7}$$

$$Q = \sqrt{2g(E_n - h_n)}\, b h_n \tag{2.8}$$