CI41A – Auxiliar 3
Viernes 28 de Agosto 2009

Problema N°1.

Se tiene un estanque de área Ae que descarga a la atmósfera, mediante una tubería de área transversal Ao. La descarga del estanque se regula mediante una válvula ubicada en el extremo aguas abajo de la tubería. Adicionalmente, existe una recarga constante de valor Qo sobre el estanque.

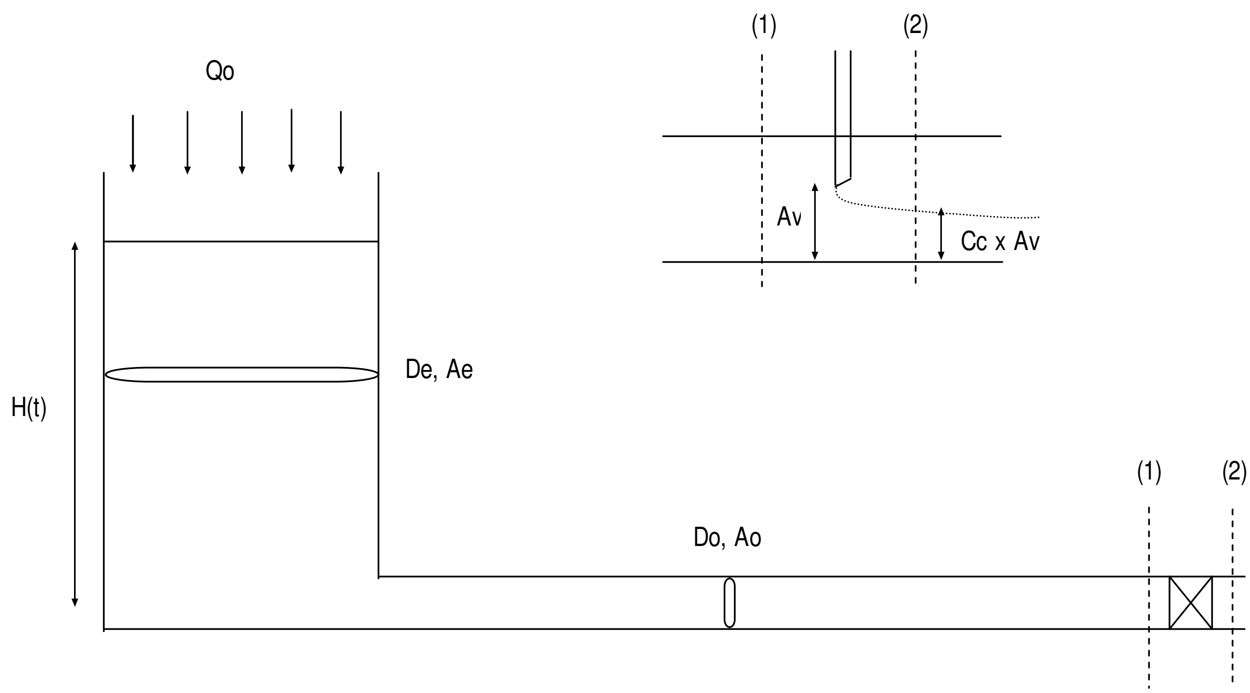

Figura 1: Esquema Problema N°1.

Despreciando pérdidas singulares y friccionales del sistema, y considerando que la altura del estanque varía con la expresión:

$$H(t) = H_0 + \beta \sin(\omega t) \quad \beta, \omega > 0 \tag{1.1}$$

Encuentre una expresión para la apertura de la válvula en función del tiempo $A_v(t)$.

Problema N°2.

(a) Considere un tramo de tubería formado por N subtramos de largo L_i y área A_i, como se muestra en la Figura 2.1. Suponiendo fluido incompresible, tubería indeformable y que el flujo ocurre en régimen laminar, plantee una ecuación que permita determinar la variación impermanente del caudal en la tubería en función del valor del Bernoulli en los extremos de ella (secciones (1) y (N+1)).

(b) Considere la tubería mostrada en la Figura 2.2, formada por 3 tramos de largos L_1, L_2 y L_3, de áreas A_1, A_2 y A_3, respectivamente. La tubería es alimentada por un estanque de carga constante, H_0. La tubería descarga al océano. Suponga que el nivel del océano varía debido a efectos de marea según la ecuación: $H_m = H_{m0} + \Delta H \sin(\omega\, t)$. i) Determine una ecuación diferencial que permita determinar la variación del caudal conducido por la tubería en el tiempo, bajo las mismas condiciones de la parte a) ii) En torno a qué valor oscila el caudal en el sistema?

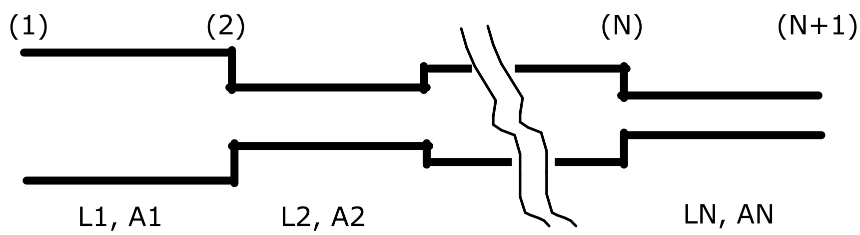

Figura 2.1.

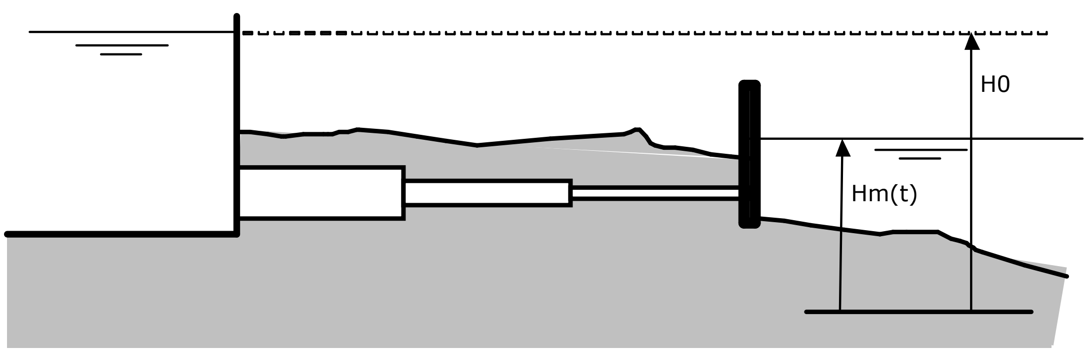

Figura 2.2.

Problema N°3

(a) Considere una tubería horizontal conformada por n tramos distintos (ver Figura 3.1.) . Sean L_i, D_i y f_i los valores conocidos de la longitud, diámetro y factor de fricción de cada tramo i, con $i = 1, \dots, n$. Suponga que la tubería es indeformable y que conduce un fluido incompresible en régimen impermanente. Obtenga una ecuación diferencial que permita determinar la variación temporal de la velocidad en el primer tramo de la tubería $(i = 1)$ en función de la diferencia de Bernoulli entre las secciones inicial y final de ellas (sección 1 y $n + 1$). Su análisis debe considerar pérdidas friccionales pero puede despreciar las pérdidas singulares.

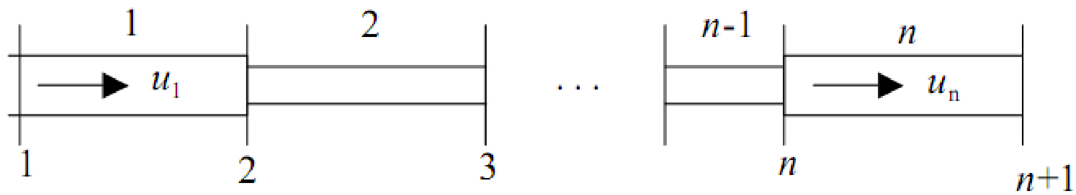

Figura 3.1.

(b) Suponga que en el extremo de aguas arriba de la tubería de la parte (a) existe un estanque de área A_e y nivel (medio con respecto al eje de la tubería) variable, $h_e(t)$, y en el extremo de aguas abajo existe una válvula de compuerta que descarga a la atmósfera, con una abertura variable en el tiempo, $A_v(t)$, y con un coeficiente de contracción, C_c. Suponga ahora que el fluido que circula por este sistema es ideal (es decir no genera pérdidas friccionales ni singulares).

i) Determine los valores de Bernoulli en los extremos de la tubería (es decir, inmediatamente aguas abajo del estanque e inmediatamente aguas arriba de la válvula) para un tiempo cualquiera, considerando conocidos $h_e(t)$ y $A_v(t)$. Suponga que el descenso del estanque es lento de modo que es posible despreciar la altura de velocidad.

ii) En base al resultado de la parte (a), determine la ley de operación de la válvula, $A_v(t)$, si se desea que el nivel del estanque disminuya, a partir del nivel inicial conocido, h_{e0}, a tasa constante:

$$\frac{dh_e}{dt} = -u_e = cte \tag{3.1}$$

Con u_e conocido.

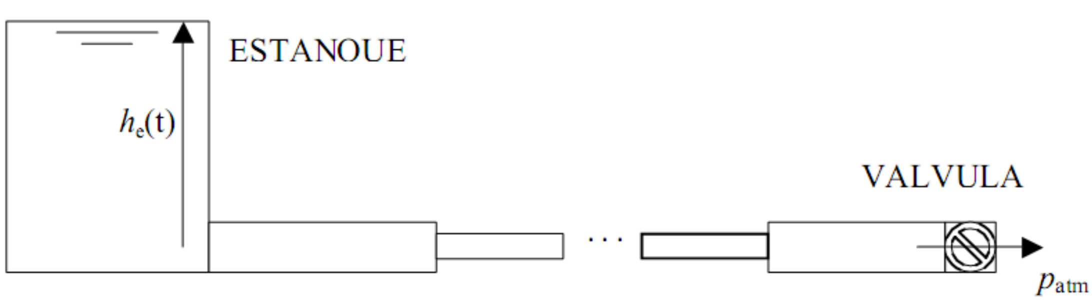

Figura 3.2.

Problema N°4 (Propuesto)

En el sistema de la Figura, la bomba impulsa un caudal entre dos estanques. Una válvula permite controlar el caudal circulante. Se desea estudiar el transiente que ocurre al operar la válvula. Para ello se pide:

(a) Determinar, utilizando el método inelástico, una ecuación diferencial que permita determinar la variación de caudal en el tiempo debido a una operación brusca de la válvula (apertura o cierre), tomando en cuenta la energía entregada por la bomba, la pérdida friccional en la tubería de largo L y diámetro D, y la pérdida singular en la válvula. Desprecie los efectos impermanentes de cualquier tipo en la bomba, desprecie los efectos impermanentes en la válvula.

(b) Calcular el régimen impermanentes asociado a una apertura brusca de la válvula, de modo que el coeficiente de pérdida, k_v, disminuye desde un valor inicial k_{v0}. Suponga que la válvula se abre completamente y que en esa situación $k_v = 0$. Desprecie las pérdidas friccionales en su análisis. Se pide:

   a. Determinar el caudal impulsado en el régimen permanente inicial, Q_i.
   b. Determinar el caudal impulsado en el régimen permanente final, Q_f.
   c. Determinar el tiempo que demora el caudal en aumenta desde Q_i al 99% de Q_f.

Datos: $L = 200\ [m]$; $D = 0.2\ [m]$; $\Delta h = 10\ [m]$; $k_{v0} = 10$; $H_0 = 15\ [m]$; $\beta = 200\ \left[\frac{s}{m^2}\right]$; $Q_0 = 0.05\ \left[\frac{m^3}{s}\right]$

Curva característica de la bomba:

$$H = H_0 \qquad 0 \leq Q \leq Q_0 \tag{4.1}$$

$$H = H_0 - \beta(Q - Q_0) \qquad Q_0 \leq Q \leq Q_0 + H_0/\beta \tag{4.2}$$

$$H = 0 \qquad Q \geq Q_0 + H_0/\beta \tag{4.3}$$

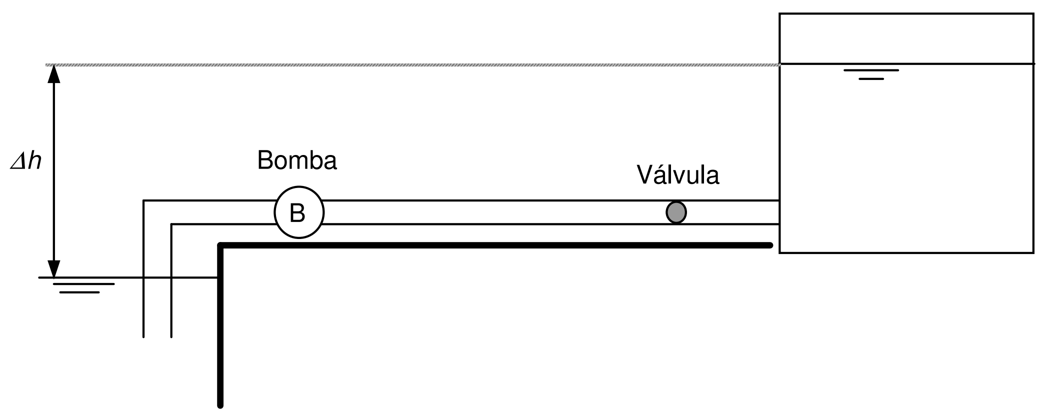

Figura 4: Esquema del Problema N°4.

Referencias:

1. Control N°1, Problema N°2 – Primavera 2006. Prof. Y. Niño. Auxs. A. Edwards & C. Godoy.
2. Control N°1, Problema N°2 – Primavera 2007. Prof. Y. Niño. Auxs. C. Godoy. & S. Mordojovich.
3. Control N°1, Problema N°2 – Primavera 2008. Prof. Y. Niño. Auxs. C. Godoy. & C. Reiher.
4. Control N°1, Problema N°2 – Primavera 2002. Prof. Y. Niño. Aux. C. Reiher.

CI41A – Pauta Auxiliar 3
Viernes 28 de Agosto 2009

Problema N°1

En el estanque se tiene que:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = Q_{in} - Q_{out} \tag{1.1}$$

El caudal que entra es $Q_{in} = Q_0$, y el caudal que sale es $Q_{out} = A_0 u$, por otra parte:

$$V = A_e H(t) \rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = A_e \ \frac{\partial H(t)}{\partial t} \tag{1.2}$$

luego,

$$A_e \ \frac{\partial H(t)}{\partial t} = Q_0 - uA_0 \tag{1.3}$$

$$u = \frac{Q_0}{A_0} - \frac{A_e}{A_0}\frac{\partial H(t)}{\partial t} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{A_e}{A_0}\frac{\partial^2 H(t)}{\partial t^2} \tag{1.5}$$

Aplicando Euler en tubería:

$$\frac{L}{g}\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta B = 0 \tag{1.5}$$

Si $B_0 = H(t)$, y $u_1 A_0 = uA_0 = u_2 C_c A_v$, entonces:

$$u_2(t) = \left(\frac{A_0}{C_c A_v}\right) u(t) \tag{1.6}$$

Considerando $B_1 = B_2$, energía antes y después de la válvula:

$$B_1 = B_2 = \frac{u_2^2}{2g} = \left(\frac{A_0}{C_c A_v}\right)^2 \ \frac{u^2}{2g} \tag{1.7}$$

Reemplazando la ecuación (1.7) en la ecuación (1.5), se obtiene la siguiente ecuación:

$$-\frac{L}{g}\frac{A_e}{A_0}\frac{\partial^2 H(t)}{\partial t^2} + \left(\frac{A_0}{C_c A_v}\right)^2 \left(\frac{Q_0}{A_0} - \frac{A_e}{A_0}\frac{\partial H(t)}{\partial t}\right)^2 \frac{1}{2g} - H(t) = 0 \tag{1.8}$$

Además, la variación de la altura de agua en el estanque es $H(t) = H_0 + \beta \sin(\omega t)$, reemplazando este término en la ecuación (1.8) se obtiene la siguiente expresión:

$$\beta\omega^2 \frac{L}{g}\frac{A_e}{A_0}\sin(\omega t) + \left(\frac{Q_0}{C_c A_v} - \beta\omega \frac{A_e}{C_c A_v}\cos(\omega t)\right)^2 \frac{1}{2g} - H_0 - \beta\sin(\omega t) = 0 \tag{1.9}$$

$$A_v = \left(\frac{Q_0}{C_c} - \beta\omega \frac{A_e}{C_c}\cos(\omega t)\right)\frac{1}{\sqrt{2g}}\left(H_0 + \beta\sin(\omega t) - \beta\omega^2 \frac{L}{g}\frac{A_e}{A_0}\sin(\omega t)\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{1.10}$$

Problema Nº2.

Parte a. Si se tiene un sistema de N tuberías, con largos y diámetros particulares (Figura 2.1) es posible plantear las ecuaciones de Euler en cada tramo de tubería, suponiendo fluido incompresible y tubería indeformable:

$$\frac{L_i}{g}\frac{\partial u_i}{\partial t} + B_{i+1} - B_i + \Lambda_{fi} = 0 \qquad (2.1)$$

Utilizando la ecuación de continuidad:

$$u_i A_i = u_j A_j \qquad (2.2)$$

Sumando las ecuaciones de Euler en cada tramo de tubería, reagrupando y utilizando continuidad, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{L_i}{gA_i}\frac{\partial Q}{\partial t} + B_{n+1} - B_1 + \sum_{i=1}^{n}\Lambda_{fi} = 0 \qquad (2.3)$$

Conocido que el flujo está en régimen laminar, es posible obtener una expresión para las pérdidas friccionales en función del caudal.

$$\Lambda_{fi} = \frac{f_i L_i}{D}\frac{u_i|u_i|}{2g} \; ; f = \frac{64}{Re_i} = \frac{64\nu}{|u_i|D_i} \rightarrow \; \Lambda_{fi} = \frac{8\nu\pi L_i}{gA_i^2}Q \qquad (2.4)$$

Con lo cual se obtiene una ecuación diferencial para el caudal:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{L_i}{gA_i}\right)\frac{\partial Q}{\partial t} + \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{8\nu\pi L_i}{gA_i^2}\right)Q + B_{n+1} - B_1 = 0 \qquad (2.5)$$

$$C_1\frac{\partial Q}{\partial t} + C_2 Q + B_{n+1} - B_1 = 0 \qquad (2.5)$$

Parte b. Considerando las condiciones de la Figura 2.2., es posible plantear la ecuación de Euler para la tubería considerando un forzamiento desde aguas abajo, producida por la marea.

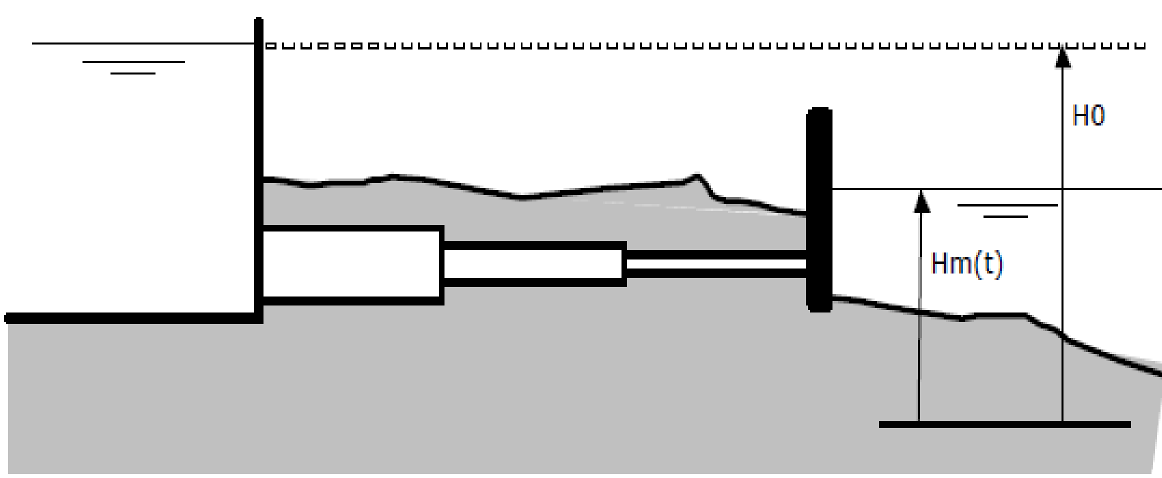

Figura 2.2.: Esquema Pregunta 2, parte b.

Los términos de la ecuación encontrados en la parte (a) serán:

$$B_1 = H_0\ ; B_{n+1} = H_{mo} + \Delta H \sin(\omega t) \tag{2.6}$$

$$C_1 \frac{dQ}{dt} + C_2 Q + H_{mo} + \Delta H \sin(\omega t) - H_0 = 0 \tag{2.7}$$

Reordenando la ecuación:

$$C_1 \frac{dQ}{dt} + C_2 Q + (H_{mo} - H_0) = -\Delta H \sin(\omega t) \tag{2.8}$$

Definiendo la variable auxiliar $\tilde{Q}$:

$$\tilde{Q} = Q - \frac{H_0 - H_{mo}}{C_2} \rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{d\tilde{Q}}{dt} \tag{2.9}$$

Entonces:

$$C_1 \frac{d\tilde{Q}}{dt} + C_2 \tilde{Q} = -\Delta H \sin(\omega t) \tag{2.10}$$

La solución de esta ecuación es del tipo sinusoidal, la que oscila en torno a cero. Por lo tanto, si $\tilde{Q}$ oscila en torno a cero, el caudal Q oscilará en torno a $\frac{H_0 - H_{mo}}{C_2}$. (resolver EDO).

Problema N°3

Parte (a). Planteando la ecuación de Euler con pérdidas friccionales en cada tramo de la tubería se tendrán n ecuaciones del tipo:

$$\frac{L_i}{g}\frac{\partial u_i}{\partial t} + B_{i+1} - B_i + \Lambda_{fi} = 0 \tag{3.1}$$

Sumando sobre todas las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{L_i}{g}\frac{\partial u_i}{\partial t} + B_{n+1} - B_1 + \sum_{i=1}^{n}\Lambda_{fi} = 0 \tag{3.2}$$

Donde las pérdidas friccionales en cada tramo se expresan como:

$$\Lambda_{fi} = \frac{f_i L_i}{D_i}\frac{u_i|u_i|}{2g} \tag{3.3}$$

Usando la ecuación de continuidad:

$$u_i A_i = u_j A_j \tag{3.4}$$

Para todo $i, j \in \{1, \dots n\}$, con $i \neq j$. Además $A_i = \pi D_i^2/4$, es posible expresar la velocidad de cada tramo, u_i, $i = 2, \dots, n$ en función de la velocidad en el primer tramo, u_1:

$$u_i = \frac{A_1}{A_i}u_1 = \left(\frac{D_1}{D_i}\right)^2 u_1 \tag{3.5}$$

Reemplazando esta última expresión en (3) se obtiene la ecuación diferencial que rige al sistema:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{L_i}{g}\left(\frac{D_1}{D_i}\right)^2\frac{\partial u_1}{\partial t} + B_{n+1} - B_1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{f_i L_i D_1^4}{D_i^5}\frac{u_1|u_1|}{2g} = 0 \tag{3.6}$$

Parte (b). En la conexión entre el estanque y la sección (1), despreciando pérdidas, se tiene :

$$\frac{h_e}{g}\frac{\partial u_e}{\partial t} + B_1 - B_e = 0 \tag{3.7}$$

donde el Bernoulli en el estanque, despreciando la altura de velocidad, queda dado por:

$$B_e = h_e \tag{3.8}$$

y la velocidad en el estanque se puede expresar como:

$$u_e - \frac{dh_e}{dt} \tag{3.9}$$

Por lo tanto:

$$B_1 = h_e + \frac{h_e}{g}\frac{d^2 h_e}{dt^2} \tag{3.10}$$

En la válvula, despreciando el término impermanente, se cumple igualdad de Bernoulli entre la sección $n+1$ y la zona de máxima contracción aguas abajo:

$$B_{n+1} = \frac{u_v^2}{2g} \tag{3.11}$$

Donde u_v es la velocidad en la zona de máxima concentración, dada por continuidad como:

$$u_v = u_{n+1}\frac{A_{n+1}}{C_c A_v} \tag{3.12}$$

Por lo tanto,

$$B_{n+1} = \left(\frac{A_{n+1}}{c_c A_v}\right)^2 \frac{u_{n+1}^2}{2g} \tag{3.13}$$

Ahora consideremos cómo debe operar la válvula para que el estanque baje a tasa constante u_e. Esto es:

$$\frac{du_e}{dt} = \frac{d^2 h_e}{dt^2} = 0 \tag{3.14}$$

Como por continuidad debemos cumplir que $u_e A_e = u_1 A_1 = \cdots = u_n A_n$, entonces es fácil ver que:

$$u_i = u_e \frac{A_e}{A_i} \tag{3.15}$$

Y, a partir de (3.14), se tiene que:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{du_e}{dt}\frac{A_e}{A_i} = 0 \tag{3.16}$$

Reemplazando este resultado en (3.6), consideran fluido ideal (sin pérdidas), se obtiene:

$$B_{n+1} - B_n = 0 \tag{3.17}$$

Luego, reemplazando en las ecuaciones de B_1 y B_{n+1}:

$$\left(\frac{A_{n+1}}{C_c A_v}\right)^2 \frac{u_{n+1}^2}{2g} - h_e = 0 \tag{3.18}$$

Usando la velocidad u_i, se tiene que:

$$\left(\frac{A_e}{C_c A_v}\right)^2 \frac{u_e^2}{2g} - h_e = 0 \tag{3.19}$$

e integrando la ecuación (3.9), partiendo de la condición inicial $h_e(0) = h_{e0}$:

$$h_e(t) = h_{e0} - u_e t \tag{3.20}$$

Reemplazando este resultado en (3.19), se obtiene finalmente:

$$A_v(t) = \frac{A_e}{c_c}\left(\frac{u_e^2}{2g}\frac{1}{-u_e t}\right)^{1/2} \tag{3.21}$$