

Ingeniería Civil
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

ECUACIÓN DE BERNOULLI y APLICACIONES

Prof. Aldo Tamburrino Tavantzis

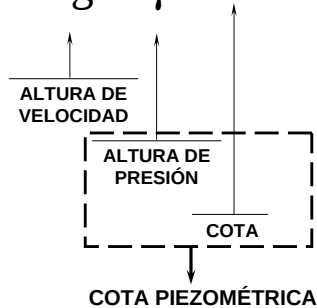


Daniel Bernoulli (1700 – 1782)

SUMA DE BERNOULLI

$$B = h + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma}$$

$$B = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + h$$



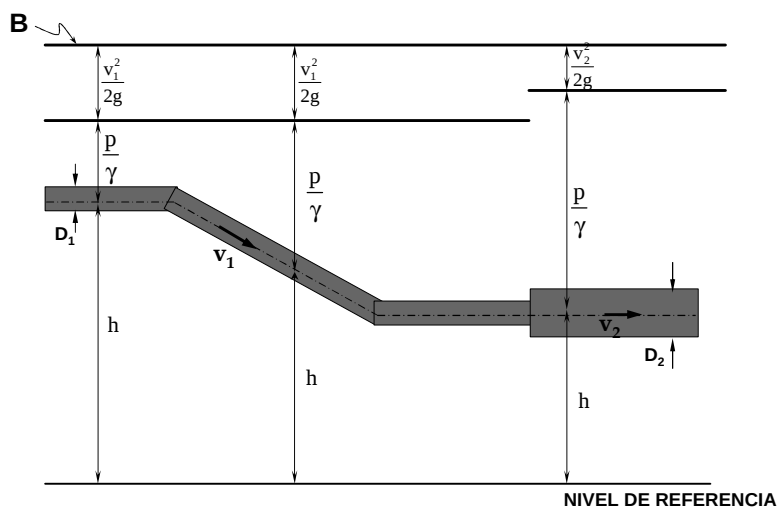
COTA PIEZOMÉTRICA:

$$\frac{\hat{p}}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + h$$

**EL BERNOULLI Y LA COTA PIEZOMÉTRICA TIENEN
DIMENSIONES DE LONGITUD**

SUMA DE BERNOULLI

$$B = h + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma}$$



ECUACIÓN (o PRINCIPIO) DE BERNOULLI

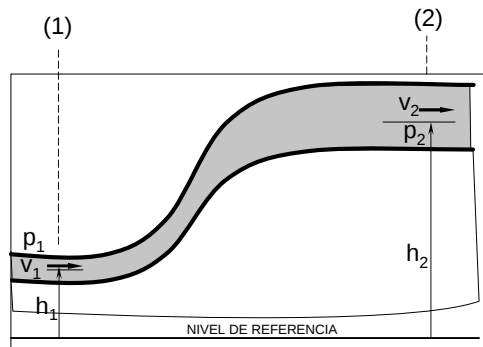
La ecuación de Bernoulli

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}$$

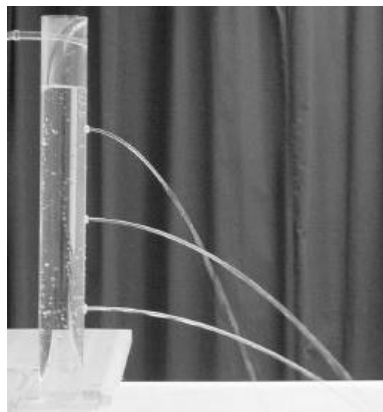
junto a la ecuación de continuidad

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

son fundamentales para la resolución de los problemas de la Dinámica de los Fluidos



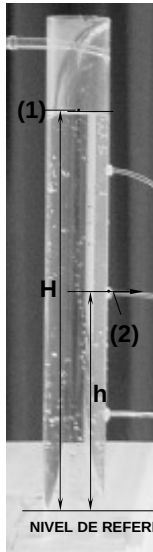
APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE BERNOULLI



Principio de Torricelli:

“La velocidad con la que sale un líquido por el orificio de un recipiente es igual a la que adquiriría un cuerpo que se dejara caer libremente desde la superficie libre del líquido hasta el nivel del orificio”.

APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE BERNOULLI



Apliquemos la ecuación de Bernoulli entre los puntos (1) y (2) considerando que el nivel del líquido (H) permanece constante.

$$B_1 = B_2$$

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}$$

En el punto (1): $h_1 = H$, $p_1 = p_{atm}$ (o $p_1 = 0$ si trabajamos con presiones relativas). Como el nivel se mantiene constante: $v_1 = 0$.

En el punto (2): $h_2 = h$, $p_2 = p_{atm}$ (o $p_2 = 0$ si trabajamos con presiones relativas).

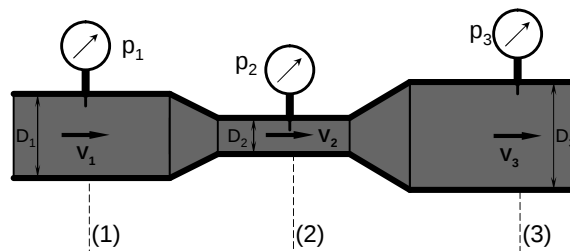
$$H + 0 + \frac{p_{atm}}{\gamma} = h + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_{atm}}{\gamma}$$

De donde despejamos la velocidad de salida:

$$v_2 = \sqrt{2g(H-h)}$$

APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE BERNOULLI

FLUJO EN UNA TUBERÍA CON CAMBIOS DE SECCIÓN



Continuidad: El caudal es el mismo en las secciones (1), (2) y (3)

Conservación de la energía: El Bernoulli es el mismo en las secciones (1), (2) y (3)

APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE BERNOULLI

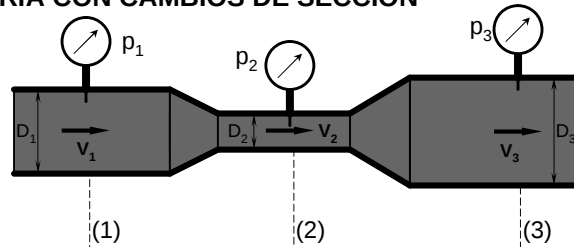
FLUJO EN UNA TUBERÍA CON CAMBIOS DE SECCIÓN

Continuidad:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$$

$$v_1 = \frac{Q}{A_1}, \quad v_2 = \frac{Q}{A_2}$$

$$v_3 = \frac{Q}{A_3}$$



Como $D_2 < D_1 < D_3$, se tiene que $A_2 < A_1 < A_3$, resultando que $V_2 > V_1 > V_3$

APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE BERNOULLI

FLUJO EN UNA TUBERÍA CON CAMBIOS DE SECCIÓN

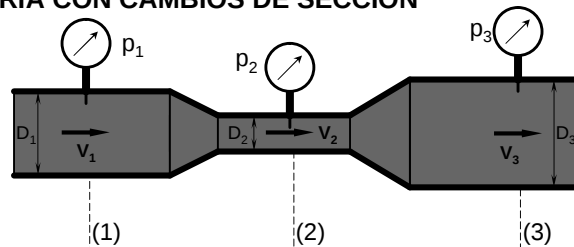
Conservación de la energía:

$$B_1 = B_2 = B_3 = B$$

$$B_1 = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma}$$

$$B_2 = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}$$

$$B_3 = h_3 + \frac{v_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\gamma}$$



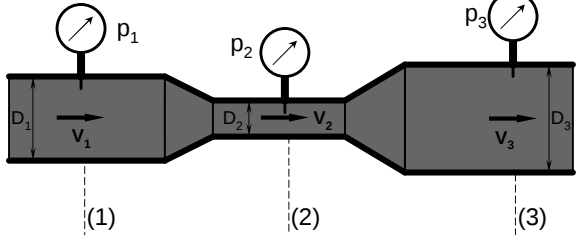
Consideremos que la tubería es horizontal y que el nivel de referencia está en el eje de la tubería. Esto significa que $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ y las ecuaciones de Bernoulli se reducen a:

APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE BERNOULLI

FLUJO EN UNA TUBERÍA CON CAMBIOS DE SECCIÓN

$$B_1 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma}$$

$$B_2 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}$$

$$B_3 = \frac{v_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\gamma}$$


Como $B_1 = B_2 = B_3 = B$, tenemos que la presión en cada sección es igual a:

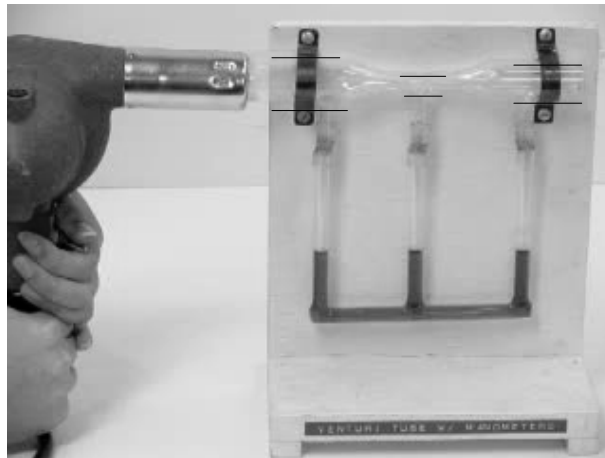
$$p_1 = \gamma \left(B - \frac{v_1^2}{2g} \right), \quad p_2 = \gamma \left(B - \frac{v_2^2}{2g} \right), \quad p_3 = \gamma \left(B - \frac{v_3^2}{2g} \right)$$

O sea, en las secciones de menor diámetro, el área es menor, la velocidad es mayor y la presión es menor.

APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE BERNOULLI

FLUJO EN UNA TUBERÍA CON CAMBIOS DE SECCIÓN

La presión es menor en las secciones de mayor velocidad



APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE BERNOULLI



GIOVANNI BATISTA VENTURI
(1746 – 1822)

TUBO DE VENTURI

o VENTURÍMETRO:

Venturi tuvo la idea de medir las presiones en la sección de mayor área y en la de menor área para determinar el caudal que escurre por la tubería.

$$B_1 = B_2$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}$$

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma}$$

APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE BERNOULLI

VENTURÍMETRO:

$$\text{Además } v_1 = \frac{Q}{A_1}, \quad v_2 = \frac{Q}{A_2}$$

Reemplazando en la ecuación anterior:

$$\frac{Q^2}{A_2^2} - \frac{Q^2}{A_1^2} = 2g \left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right)$$

$$Q^2 \left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1^2 A_2^2} \right) = 2g \left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right)$$

$$Q = \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \sqrt{2g \frac{p_1 - p_2}{\gamma}}$$

APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE BERNOULLI

VENTURÍMETRO:

En las aplicaciones prácticas se usa:

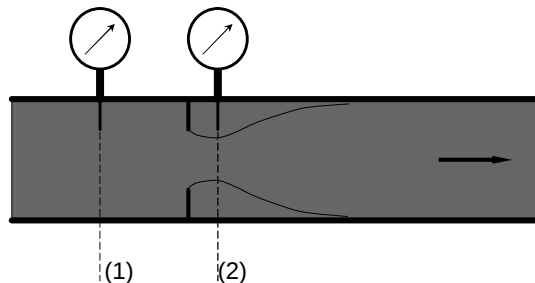
$$Q = C \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\gamma}}$$

Donde C es una constante empírica que se calibra para cada venturímetro

APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE BERNOULLI

DIAFRAGMA o PLACA ORIFICIO:

El mismo principio que el usado en el venturímetro se utiliza en la placa orificio o diafragma.



APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE BERNOULLI

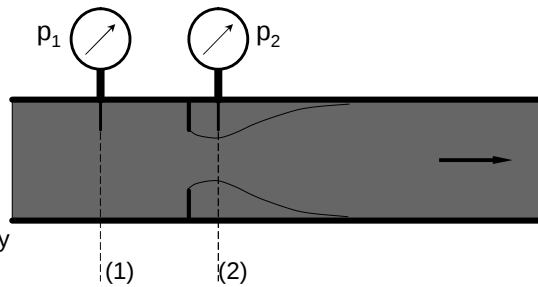
DIAFRAGMA o PLACA ORIFICIO:

Sea A el área de la tubería y A_0 el de la placa orificio.

En la sección (2) el área del chorro es $c_c A_0$.

El problema es esencialmente el mismo que el del venturímetro, resultando, reemplazando A_1 por A y A_2 por $c_c A_0$ en la expresión final:

$$Q = \frac{A c_c A_0}{\sqrt{A^2 - (c_c A_0)^2}} \sqrt{2g \frac{p_1 - p_2}{\gamma}}$$



En aplicaciones prácticas se utiliza

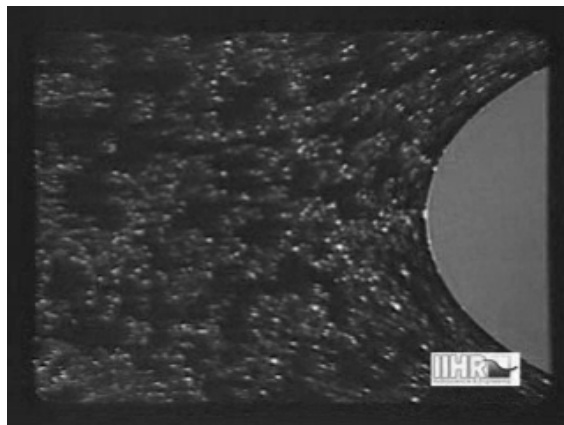
$$Q = C' \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\gamma}}$$

Donde C' se calibra experimentalmente.

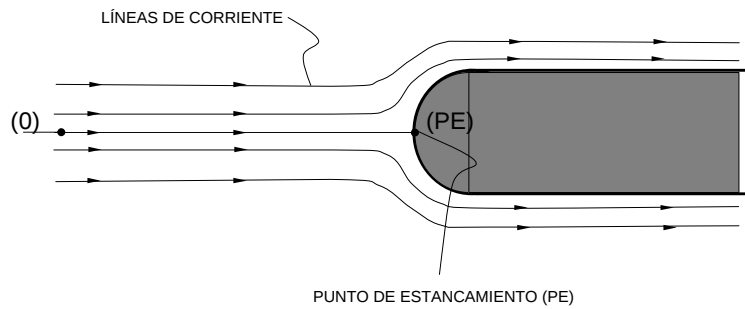
PUNTOS DE ESTANCAMIENTO

Los puntos de estancamiento son puntos del flujo en los que la velocidad es nula.

Ellos surgen para compatibilizar físicamente puntos en los que las líneas de corriente tienen radio de curvatura tendiendo a cero.



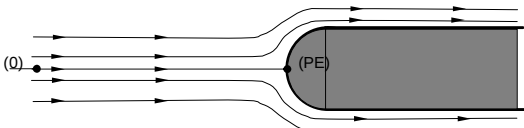
PUNTOS DE ESTANCAMIENTO



Se cumple: $B_0 = B_{PE}$

PUNTOS DE ESTANCAMIENTO

$B_0 = B_{PE}$



$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} = \frac{p_{PE}}{\gamma}$$

Podemos conocer la velocidad:

$$v_0 = \sqrt{2g \left(\frac{p_{PE} - p_0}{\gamma} \right)}$$

Diagram illustrating the relationship between static pressure and dynamic pressure at the stagnation point (PE) and a point (0) in the flow:

Diagram showing two vertical tubes (Pitot-static probes) connected to a manometer. The left tube is labeled 'PRESIÓN ESTÁTICA' and the right tube is labeled 'PRESIÓN DINÁMICA'. The manometer shows the difference in pressure between the two points.

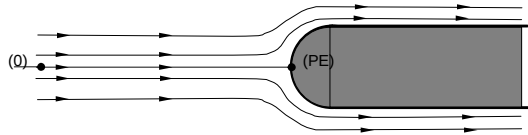
PUNTOS DE ESTANCAMIENTO

Podemos conocer la velocidad:

$$v_0 = \sqrt{2g \left(\frac{p_{PE} - p_0}{\gamma} \right)}$$

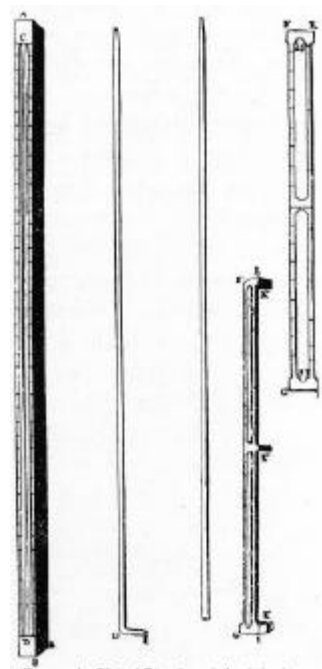


Instrumento para medir la velocidad
de los fluidos: TUBO DE PITOT



TUBO DE PITOT

Inventado en 1732 por Henri de Pitot
(1695 – 1771) para determinar el
caudal del río Sena (Francia)



TUBO DE PITOT

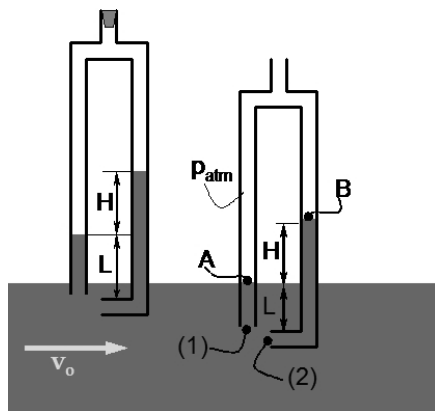


Figure 7. Technicians using a Pitot-Darcy tube (Darcy and Bazin, 1865).

El punto (2) es un punto de estancamiento

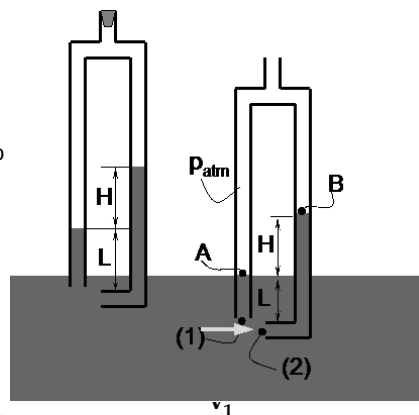
TUBO DE PITOT

$$B_1 = B_2$$

Como el punto (2) es un punto de estancamiento

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma}$$

$$v_1 = \sqrt{2g \left(\frac{p_2 - p_1}{\gamma} \right)}$$



p_1 y p_2 las ligamos con las presión que hay dentro del tubo. En el tubo la situación es hidrostática:

$$p_1 = p_A + \gamma L, \quad p_2 = p_B + \gamma(H + L)$$

Pero $p_A = p_B = p_{atm}$, de donde resulta que $p_2 - p_1 = \gamma H \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gH}$