TEOREMA DEL TRANSPORTE DE REYNOLDS

Sistema y Volumen de Control

- **Sistema:** conjunto de partículas de fluido que se desplaza, cambia de forma, cambia sus propiedades, pero contiene siempre las mismas partículas, es decir, la misma cantidad de materia.

- **Volumen de Control:** volumen fijo en el espacio, limitado por una superficie cerrada única e invariable (**superficie de control**). Un volumen de control dentro de un flujo es ocupado por partículas que entran y salen a través de la superficie de control.

Sean:

N una propiedad extensiva

η la propiedad intensiva (o específica)

$$N = \int_{masa} \eta \, dm = \int_{volumen} \eta \rho \, dV$$

Busquemos una expresión para $\dfrac{dN}{dt}$

Podemos distinguir tres volúmenes bien definidos:

- **I** Pertenece al volumen de control, pero no contiene partículas del sistema en el instante t + Δt.
- **II** Pertenece al volumen de control y contiene partículas del sistema en los instantes t y t + Δt.
- **III** Volumen opupado por las partículas del sistema que en el tiempo t + Δt han salido del volumen de control

Determinemos la tasa de cambio de N : $\dfrac{dN}{dt}$

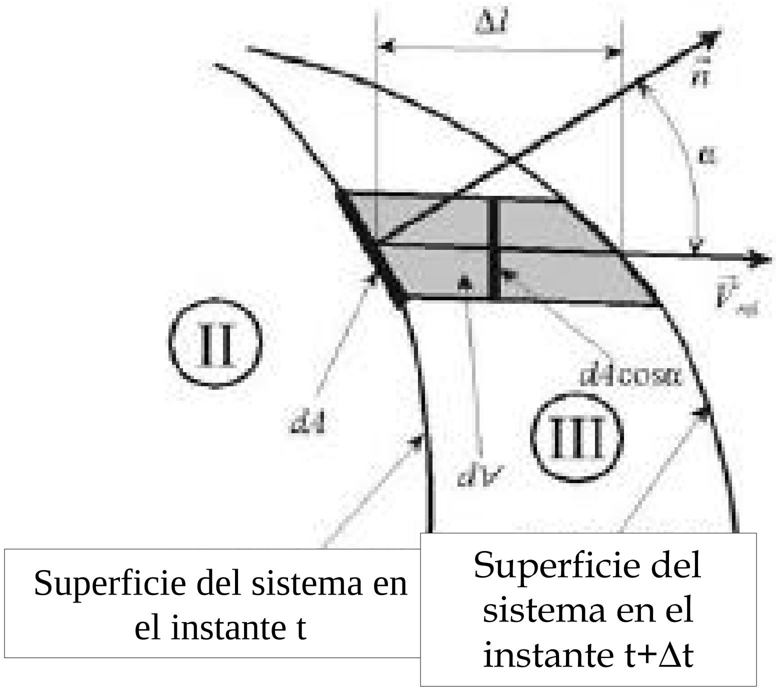
$$N_{SIST_{t+\Delta t}} - N_{SIST_t} = \Big(\int_{II} \eta\cdot\rho\cdot dV + \int_{III} \eta\cdot\rho\cdot dV\Big)_{t+\Delta t} - \Big(\int_{II} \eta\cdot\rho\cdot dV\Big)_t$$

$$\frac{N_{SIST_{t+\Delta t}} - N_{SIST_t}}{\Delta t} = \frac{\Big(\int_{II} \eta\cdot\rho\cdot dV + \int_{I} \eta\cdot\rho\cdot dV\Big)_{t+\Delta t} - \Big(\int_{II} \eta\cdot\rho\cdot dV\Big)_t}{\Delta t} + \frac{\Big(\int_{III} \eta\cdot\rho\cdot dV\Big)_{t+\Delta t}}{\Delta t} - \frac{\Big(\int_{I} \eta\cdot\rho\cdot dV\Big)_{t+\Delta t}}{\Delta t}$$

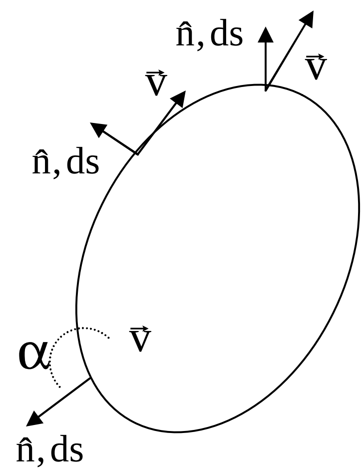
$$\frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Big(\int_{II} \eta\cdot\rho\cdot dV + \int_{I} \eta\cdot\rho\cdot dV\Big)_{t+\Delta t} - \Big(\int_{II} \eta\cdot\rho\cdot dV\Big)_t}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Big(\int_{III} \eta\cdot\rho\cdot dV\Big)_{t+\Delta t}}{\Delta t} - \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Big(\int_{I} \eta\cdot\rho\cdot dV\Big)_{t+\Delta t}}{\Delta t}$$

$$\int \eta\cdot\rho\cdot v\cdot\cos\alpha\cdot ds - \int \eta\cdot\rho\cdot v\cdot\cos\alpha\cdot ds$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.} \eta\cdot\rho\cdot dV \qquad \int_{S.C.} \eta\cdot\rho\cdot\vec{v}\cdot\hat{n}\cdot ds$$



$$\int \eta \cdot \rho \cdot v \cdot \cos\alpha \cdot ds$$



$$-\int \eta \cdot \rho \cdot v \cdot \cos\alpha \cdot ds$$

TEOREMA DEL TRANSPORTE DE REYNOLDS:

$$\boxed{\boxed{\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.} \eta\rho dV + \int_{S.C.} \eta\rho\vec{v}\cdot\hat{n}dS}}$$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Apliquemos el Teorema del Transporte de Reynolds al caso en la propiedad extensiva N corresponde a la masa, m. En este caso η = 1, por lo que:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.} \rho\, dV + \int_{S.C.} \rho \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS$$

Pero en mecánica clásica la materia no se crea ni se destruye, sólo se transforma, por lo que la variación total de m en un sistema cerrado debe ser nula, resultando:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.} \rho\, dV + \int_{S.C.} \rho \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS = 0}$$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

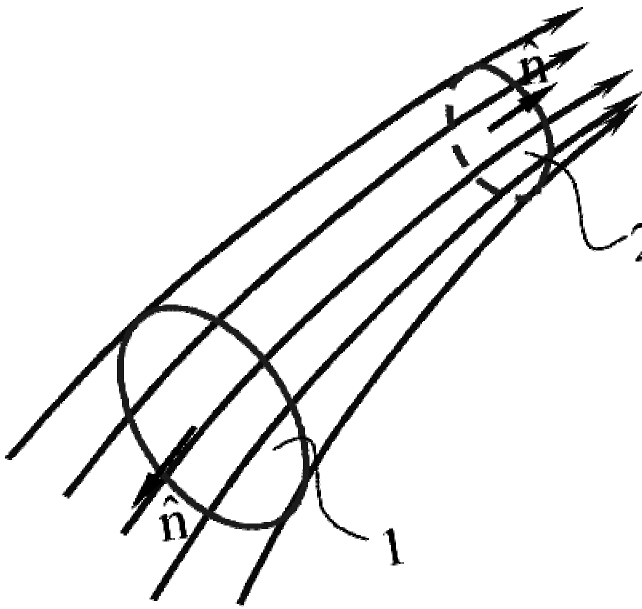
ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

- Formas de la ecuación de continuidad:
- Se define gasto másico G:

$$G \equiv \int_S \rho \vec{v} \cdot \hat{n} \, dS$$

- Las dimensiones de G son masa/tiempo (kg/s, UTM/s).

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD
APLICACIÓN A UN TUBO DE FLUJO

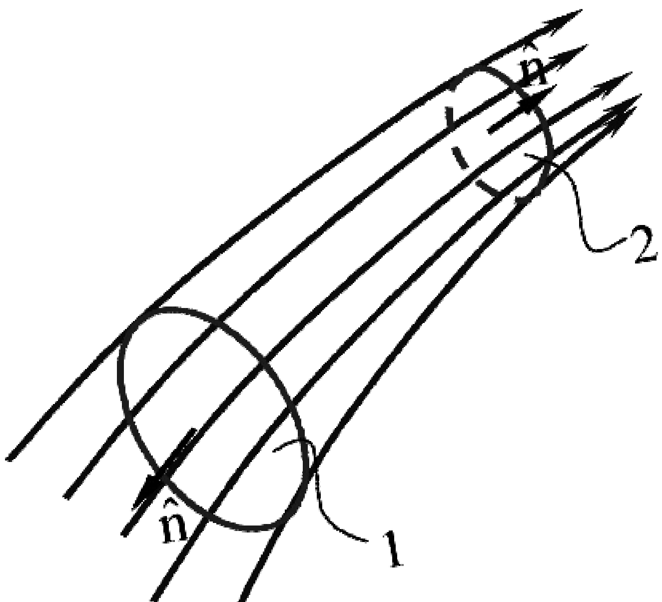


$$\int_S \rho\vec{v}.\hat{n}dS = \int_{S_2} \rho\vec{v}.\hat{n}dS - \int_{S_1} \rho\vec{v}.\hat{n}dS = G_2 - G_1$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial m}{\partial t} + G_2 - G_1 = 0$$

Caso permanente: $G_2 - G_1 = 0$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD
APLICACIÓN A UN TUBO DE FLUJO



$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV + \int_S \rho\vec{v}.\hat{n}dS = 0$$

Consideremos el caso ρ constante:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V dV + \int_S \vec{v}.\hat{n}dS = 0$$

Se define caudal (volumétrico): $Q \equiv \int_S \vec{v}.\hat{n}dS$

$$\therefore \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + Q_2 - Q_1 = 0$$

Caso permanente: $Q_1 = Q_2$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Se define velocidad media a través de la superficie i:

$$\overline{v}_i = \frac{\int_{S_i} \vec{v}.\hat{n}dS}{\int_{S_i} dS} = \frac{Q}{S_i}$$

$$\therefore \qquad Q \equiv \overline{v}S$$

Para flujo permanente en un tubo de flujo:

$$Q_1 = Q_2 \qquad \rightarrow \qquad \overline{v}_1 S_1 = \overline{v}_2 S_2$$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Se define densidad media en la sección i:

$$\rho_i = \frac{\int_{S_i} \rho \vec{v}.\hat{n} dS}{\int_{S_i} \vec{v}.\hat{n} dS} = \frac{G_i}{Q_i}$$

Para flujo permanente en un tubo de flujo:

$$G_1 = G_2 \qquad \rightarrow \qquad \rho_1 \overline{v}_1 S_1 = \rho_2 \overline{v}_2 S_2$$

ENFOQUE DIFERENCIAL DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD