

3.5 Fuerzas sobre superficies curvas

ESTABILIDAD DE CUERPOS SUMERGIDOS Y FLOTANTES

Un cuerpo sumergido o flotante se encuentra en equilibrio cuando el peso iguala al empuje. Este equilibrio puede ser estable, inestable o indiferente. Para ejemplificar estos equilibrios consideremos el bloque de madera de la

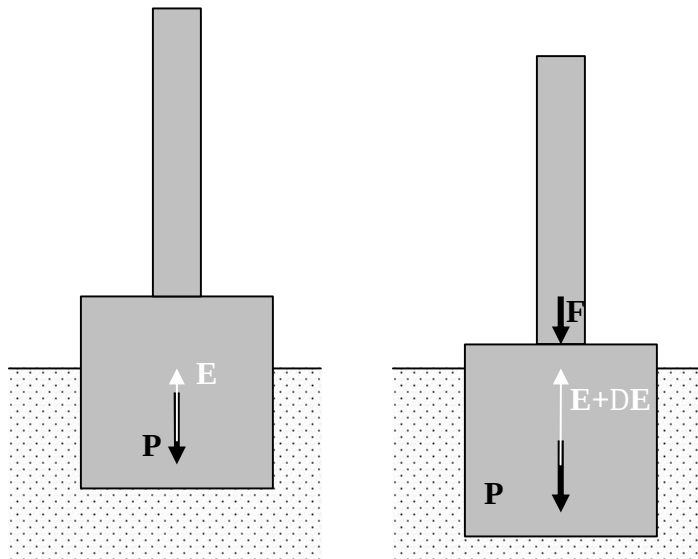


Fig. 1.- EQUILIBRIO INCONDICIONAL FRENTE A UN DESPLAZAMIENTO VERTICAL

Fig. 1, el que inicialmente está en equilibrio. Si el bloque es desplazado verticalmente hacia abajo debido a la acción de una fuerza F , aumenta el empuje en la misma proporción que aumenta el volumen sumergido, por lo que al dejar de actuar F , el bloque vuelve a su posición de equilibrio original. Este equilibrio corresponde a un equilibrio estable. Lo mismo sucede si la fuerza F actúa hacia arriba.

Si la fuerza F se aplica horizontalmente, como en la Fig. 2, el bloque se desplazará en la dirección de la fuerza, hasta que ella deje de actuar, sin cambiar su nivel de equilibrio en la vertical, resultando así en un equilibrio indiferente o .

Consideremos ahora la estabilidad del cuerpo frente a un giro, como se muestra en la Fig. 3. Dependiendo de la magnitud del giro y la posición relativa del punto de acción del peso y el

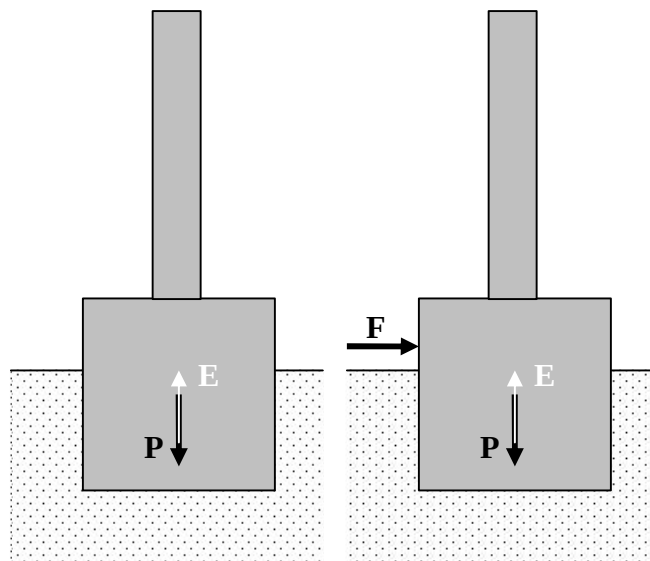


Fig. 2.- EQUILIBRIO INDIFERENTE O NEUTRA FRENTE A UN DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL

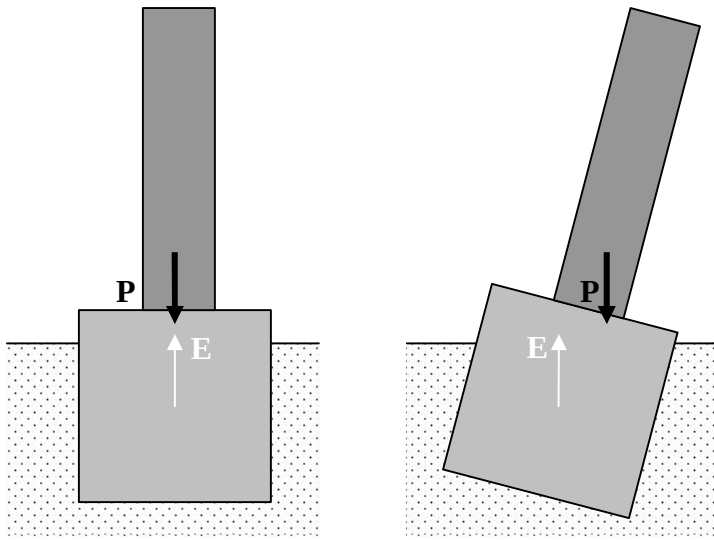


Fig. 3.- DESPLAZAMIENTO DEL CUERPO
FRENTE AL GIRO

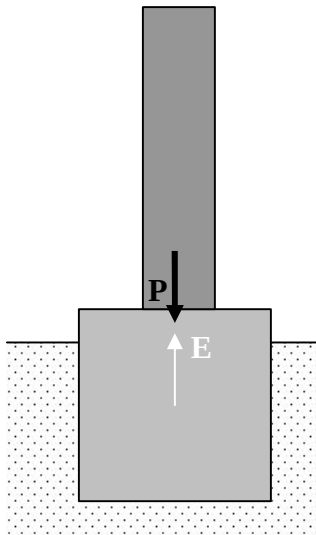


Fig. 4.a.- EQUILIBRIO
ESTABLE AL GIRO
(Vuelve a la posición
inicial)

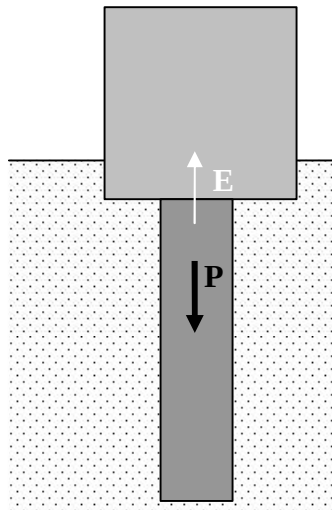


Fig. 4.a.- EQUILIBRIO
INESTABLE AL GIRO
(Busca una nueva
posición de equilibrio)

empuje, el resultado puede ser que el cuerpo vuelva a la situación original (Fig. 4.a), o se vuelque, adoptando una nueva posición de equilibrio (Fig. 4.b). En el primer caso, se tiene una condición de equilibrio estable frente al giro y en el segundo el equilibrio es inestable.

Analizaremos la condición que debe satisfacerse para que los cuerpos sumergidos y flotantes sean estables frente a giros. El punto donde actúa el peso del cuerpo corresponde a su centro de gravedad (CG) y donde actúa el empuje coincide con el centro de gravedad del volumen líquido desplazado, denominado centro de carena (CC).

Al existir un giro se genera un momento debido al par P-E. Es fácil ver que la condición de equilibrio estable para un cuerpo sumergido exige que el centro de carena se sitúe más abajo que el centro de gravedad. Mientras más abajo esté el centro de carena, más estable será el cuerpo frente a

giros. Sin embargo, el equilibrio estable de cuerpos flotantes permite que el centro de gravedad se sitúe por sobre el centro de carena, como se verá a continuación.

Consideremos un cuerpo flotante, al que sometemos a un *giro pequeño*, representado por el ángulo θ , como se muestra en la Fig. 5.

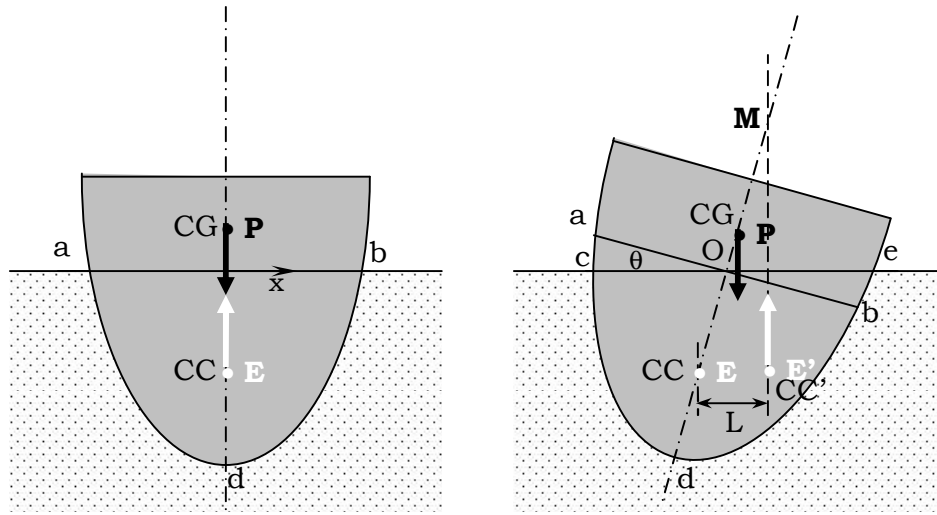


Fig. 5. ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD DE UN CUERPO FLOTANTE FRENTE A GIROS PEQUEÑOS

En el equilibrio, $P = E$, estando el volumen que define al empuje asociado al área a-b-d. Ambas fuerzas en la misma línea de acción. Si se gira el cuerpo un ángulo θ , el centro de carena se desplaza una distancia L , desde CC a CC' . Evidentemente, debe continuar cumpliéndose que el peso sea igual al empuje, aunque éste esté ahora dado por el volumen asociado al área c-e-d (E'). La intersección de la línea de acción de E' con la línea que une CC con CG se denomina metacentro (M). Es fácil ver que si M se encuentra por sobre CG , el par resultante de P y E' hace que el cuerpo vuelva a su condición de equilibrio inicial, resultando en un equilibrio estable. En cambio, si se ubica bajo CG , el equilibrio es inestable y el momento inducido por el par $P - E'$ lleva al cuerpo a una nueva posición de equilibrio.

En la situación girada, el empuje E' está dado por

$$E' = \gamma(V_{a-d-b} + V_{e-O-b} - V_{a-O-c}) \quad (1)$$

donde V_{a-d-b} , V_{e-O-b} y V_{a-O-c} son los volúmenes asociados a las áreas a-d-b, e-O-b y a-O-c, respectivamente. γ es el peso específico del líquido.

La condición que tanto en la situación girada como en la inicial el peso sea igual al empuje implica que $E = E'$, o sea:

$$\gamma V_{a-d-b} = \gamma(V_{a-d-b} + V_{e-O-b} - V_{a-O-c}) \quad (2)$$

de donde resulta que $V_{e-O-b} = V_{a-O-c}$. Como el ángulo de giro θ es pequeño, esto equivale a que el cuerpo haya tenido un giro respecto a O, que es la intersección de la línea definida por CG y CC y el plano definido por la superficie de agua.

La ubicación de CC' se determina tomando momento respecto a este punto. Llamando M_{e-O-b} y M_{a-O-c} al momento generado por el empuje asociado a los volúmenes V_{e-O-b} y V_{a-O-c} , respectivamente, se tiene:

$$\gamma V_{a-d-b} L + M_{e-O-b} - M_{a-O-c} = 0 \quad (3)$$

pero $M_{e-O-b} = \int_{e-O-b} x \gamma dV = \int_{O-b} x \gamma x dA$ y $M_{a-O-c} = \int_{a-O-c} x \gamma dV = \int_{a-O} x \gamma x dA$, donde los elementos de área O-b y a-O corresponden a las superficies resultante de la intersección de la prolongación de la superficie libre con el volumen del cuerpo, entre el eje de giro O y los extremos b y a, respectivamente. Es obvio que

$$M_{e-O-b} - M_{a-O-c} = \gamma \theta \int_{O-b} x \gamma x dA + \gamma \theta \int_{a-O} x \gamma x dA = \gamma \theta \int_{a-O-b} x^2 dA \quad (4)$$

La última integral es la definición del momento de inercia respecto al eje O de una superficie definida por la intersección de la superficie libre del líquido con el volumen del cuerpo en su posición de equilibrio.

De este modo, la Ec. 3 queda:

$$\gamma V_{a-d-b} L = \gamma \theta I_O \quad (5)$$

de donde se obtiene el desplazamiento horizontal del centro de carena:

$$L = \frac{I_O}{V_{a-d-b}} \theta \quad (6)$$

De la geometría puede obtenerse la relación entre L y el trazo $\overline{CCM}$:

$$L = \overline{CCM} \sin \theta \quad (7)$$

Como el análisis es válido para θ pequeño, $\theta \sim \sin \theta$, de donde resulta la condición de equilibrio:

$$\overline{CCM} = \frac{I_o}{V_{a-b-d}} \quad (8)$$

La Ec. 8 da la condición de estabilidad neutra (o indiferente). La condición de estabilidad del cuerpo frente giros pequeños está dada por:

$$\overline{CCM} < \frac{I_o}{V_{a-b-d}} \quad (9)$$

De este modo, el problema de estabilidad de un cuerpo flotante se ha reducido a un problema geométrico. Notar que, en general, el cuerpo puede tener giros respecto a más de un eje, por lo que el análisis debe hacerse para la ubicación más desfavorable del metacentro.

Hay que insistir que el análisis de estabilidad realizado corresponde a una condición estática y lineal (pequeño θ). Si los giros son muy grandes, puede que el cuerpo no sea estable, aunque satisfaga la condición dada por la relación (9).