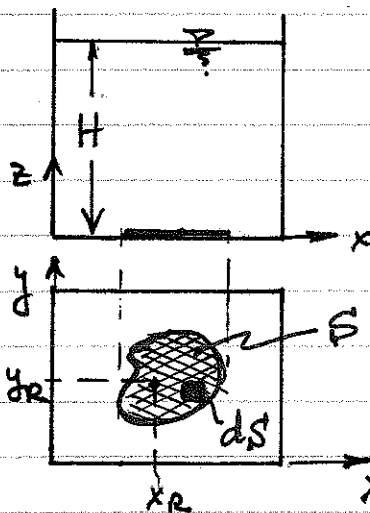


FUERZAS DE PRESIÓN SOBRE SUPERFICIES

SUPERFICIES PLANAS

Para comenzar, consideremos una superficie plana horizontal, como la que se esquematiza en la figura.



La fuerza debido a la presión actuando sobre el elemento dS es:

$$dF = p dS \quad (1)$$

Considerando presiones relativas, la presión sobre el elemento dS es

$$p = \gamma H \quad (2)$$

Luego, la fuerza actuando sobre la superficie S es:

$$F = \int_S p dS = \int_S \gamma H dS = \gamma H S \quad (3)$$

La fuerza corresponde al peso del líquido sobre la superficie

Es interesante conocer también el punto de aplicación de la fuerza (x_R, y_R)

$$x_R F = \int x dF = \int x p dS = \gamma h \int x dS$$

$$x_R = \frac{\gamma h \int x dS}{\gamma h S} = \frac{\int x dS}{h S} = x_G \quad (4)$$

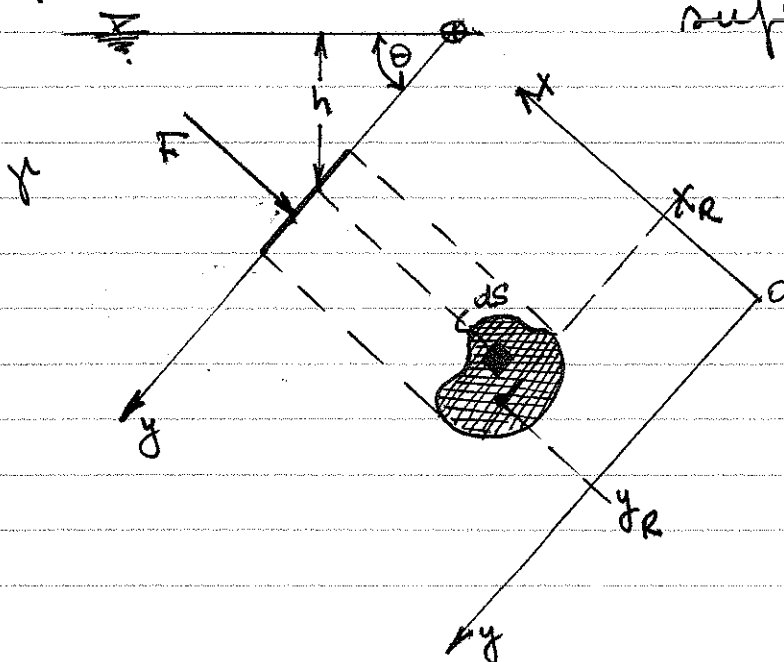
$$x_R = x_G \quad (5)$$

Del mismo modo, se obtiene

$$y_R = y_G \quad (6)$$

O sea, el punto de aplicación de la fuerza de presión corresponde al centro de gravedad de la superficie.

Consideremos ahora una superficie plana inclinada en un ángulo θ con la superficie del líquido



Sobre el elemento de superficie dS actúa una presión igual a $p = \gamma h$. Luego

$$dF = p dS$$

$$dF = \gamma h dS \quad (7)$$

$$h = y \sin \theta \quad (8)$$

luego : $F = \int \gamma y \sin \theta \, dS$

$$F = \gamma \sin \theta \int y \, dS \quad (9)$$

La integral $\int y \, dS$ podemos relacionarla con el centro de gravedad de la superficie.
Por definición

$$y_G = \frac{\int y \, dS}{S} \quad (10)$$

Ec. (9) : $F = \gamma \sin \theta y_G S \quad (11)$

Pero $\sin \theta y_G$ es la distancia desde la superficie libre al centro de gravedad de la superficie para la que calculamos la fuerza:

$$h_G = y_G \sin \theta \quad (12)$$

luego, la fuerza está dada por

$$F = \gamma h_G S \quad (13)$$

pero γh_G no es más que la presión en el centro de gravedad de la superficie:

$$p_G = \gamma h_G \quad (14)$$

de donde resulta:

$$F = p_G S \quad (15)$$

Determinemos ahora el punto de aplicación de la fuerza:

$$x_R F = \int x dF = \int x p dS = \gamma \cos \theta \int x y dS$$

$$x_R = \frac{\int x y dS}{\gamma_G S} \quad (16)$$

$\int x y dS$ corresponde al producto de inercia de la superficie respecto a los ejes x e y :

$$x_R = \frac{I_{xy}}{\gamma_G S} \quad (17)$$

Del mismo modo $y_R F = \int y dF = \int y p dS = \int \gamma \cos \theta y^2 dS$

$$y_R = \frac{\int y^2 dS}{\gamma_G S} \quad (18)$$

$\int y^2 dS$ corresponde al momento de inercia respecto al eje x

$$y_R = \frac{I_{xx}}{\gamma_G S} \quad (19)$$

El momento de inercia respecto al eje x puede ligarse al momento de inercia respecto a un eje paralelo a x que pasa por el centro de gravedad de la superficie mediante la relación de Steiner:

$$I_{xx} = I_{xxG} + y_G^2 S \quad (20)$$

De este modo la Ec. 19 se reescribe como

$$y_R = \frac{I_{xxG}}{y_G S} + \frac{y_G^2 S}{y_G S}$$

$$y_R = y_G + \frac{I_{xxG}}{y_G S} \quad (21)$$

De acuerdo a la Ec 21, la resultante siempre actúa más abajo que el centro de gravedad de la superficie.

Existe una relación análoga a la Ec (20) para el producto de inercia:

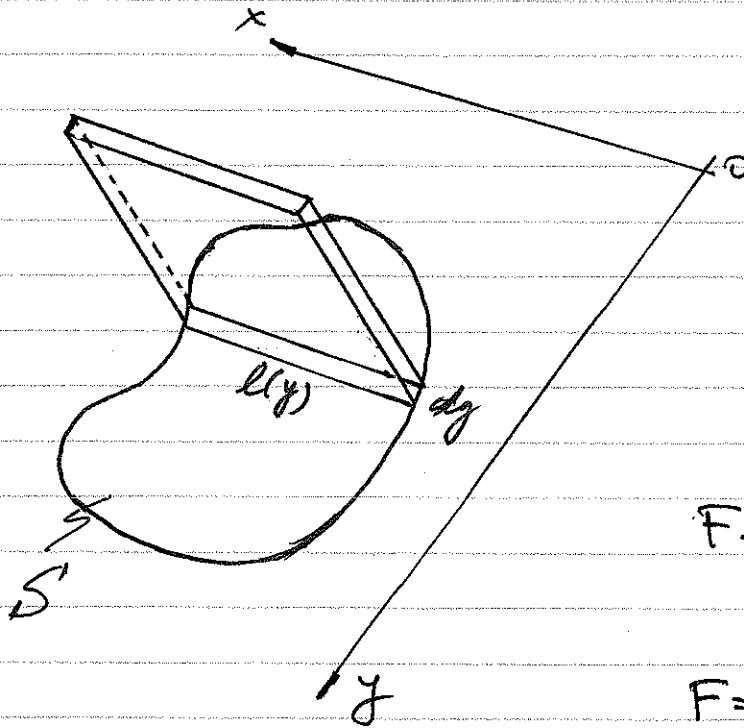
$$I_{xy} = I_{xyG} + x_G y_G S \quad (22)$$

Ec. (22) en Ec. (17):

$$x_R = x_G + \frac{I_{xyG}}{y_G S} \quad (23)$$

Notar que si la superficie es simétrica respecto al eje y_G , $I_{xyG} = 0$ y la ubicación en la dirección x de la resultante coincide con el centro de gravedad de la superficie ($x_G = x_R$).

Puede demostrarse que la resultante de la fuerza de presión es igual al volumen del prisma de presiones. Consideremos la superficie inclinada utilizada anteriormente:



La fuerza sobre la superficie S está dada por:

$$F = \int p \, dS$$

$$dS = l \, dy$$

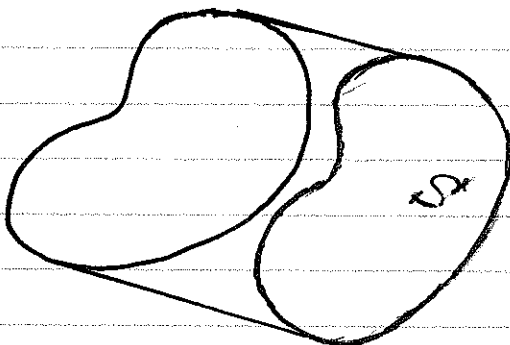
$$p = \gamma h = \gamma y \, \text{sen} \theta$$

$$F = \int \gamma y \, \text{sen} \theta \, l \, dy$$

$$F = \gamma \int \text{sen} \theta \, l y \, dy$$

Volumen geométrico

Volumen del prisma de presiones (V_{prisma})



$$F = V_{\text{prisma}} \quad (24)$$

Determinemos ahora la ubicación de la resultante:

$$x_R F = \int x p ds$$

$$x_R V_{\text{prisma}} = \int x dV_{\text{prisma}}$$

$$x_R = \frac{\int x dV_{\text{prisma}}}{V_{\text{prisma}}} \quad (25)$$

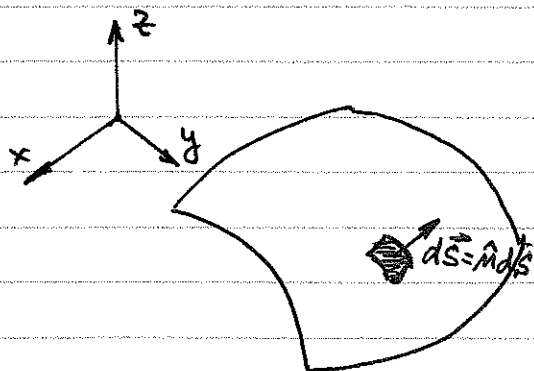
$\int x dV_{\text{prisma}}$ corresponde a la ubicación según x del centro de gravedad del prisma de previous, o sea

$$x_R = x_{G_{\text{prisma}}} \quad (26)$$

Del mismo modo

$$y_R = y_{G_{\text{prisma}}}$$

FUERZAS DE PRESIÓN SOBRE SUPERFICIES CURVAS



Consideremos ahora una superficie curva. Un elemento de superficie requiere que sea definido por su normal:

$$d\vec{S} = \hat{n} dS \quad (1)$$

La fuerza de presión está dada por:

$$d\vec{F} = p d\vec{S} \quad (2)$$

(notar que estamos considerando una fuerza positiva cuando el vector entra a la superficie)

$$E.C.(2): \quad dF_x \hat{i} + dF_y \hat{j} + dF_z \hat{k} = p dS \hat{n} \quad (3)$$

Para conocer cada una de los componentes de la fuerza hacemos producto punto por el vector unitario.

$$E.C.(3) \cdot \hat{i} \Rightarrow dF_x = p dS \hat{n} \cdot \hat{i}$$

$dS \hat{n} \cdot \hat{i}$ es la proyección de dS en el plano $y-z$ y lo denotamos como dS_x

$$\therefore dF_x = p dS_x \quad (4)$$

Del mismo modo:

$$Ee(z) \cdot \hat{j} \Rightarrow dF_y = p dS_y \quad (5)$$

$$Ee(z) \cdot \hat{k} \Rightarrow dF_z = p dS_z \quad (6)$$

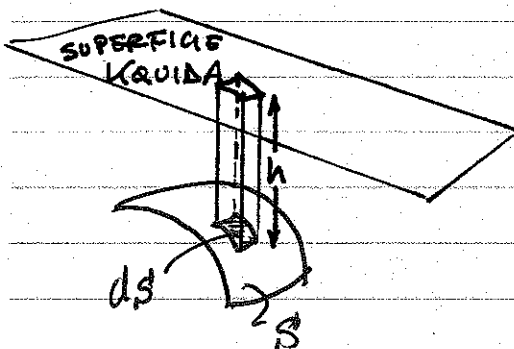
Las componentes de la fuerza total están dadas por:

$$F_x = \int p dS_x \quad (7)$$

$$F_y = \int p dS_y \quad (8)$$

$$F_z = \int p dS_z \quad (9)$$

Las componentes F_x y F_y corresponden a fuerzas sobre superficies planas y ya sabemos calcularlas. F_x es la fuerza de presión actuando sobre una superficie plana vertical, correspondiente a la proyección de la superficie sobre el plano yz . Igualmente F_y es la fuerza de presión actuando sobre la superficie definida por la proyección de la superficie sobre el plano xz .



Calculemos la componente dF_z :

$$dF_z = p dS_z = \gamma h dS_z \quad (10)$$

pero $h dS_z$ corresponde al elemento de volumen

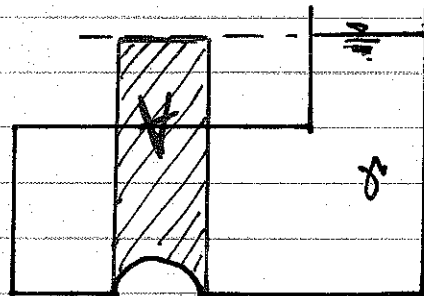
de líquido comprendido entre dS y la superficie libre (dh), por lo tanto

$$dF_z = \gamma dh \quad (11)$$

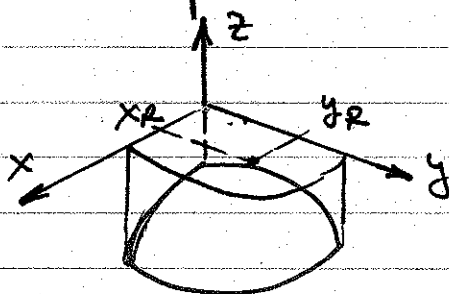
$$F_z = \int \gamma dh$$

$$F_z = \gamma h \quad (12)$$

O sea, la componente vertical corresponde al peso de la columna líquida comprendida entre la superficie S y la superficie libre. Notar que este volumen puede no ser real, como se muestra en la figura:



Determinemos ahora el punto de aplicación de las fuerzas. Para F_x y F_y , éste se calcula de la forma ya vista para superficies planas inclinadas. Calculemos el punto de aplicación de F_z :



$$F_z x_R = \int_{S_z} x p dS_z = \int_{S_z} x \gamma h dS_z$$

$$F_z x_R = \int x \gamma dh \quad (13)$$

luego,
$$x_R = \frac{\int x \, dV}{V} = x_{Gx} \quad (14)$$

similarmente se obtiene

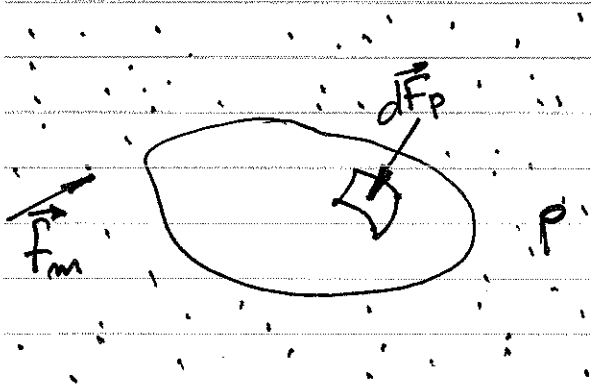
$$y_R = \frac{\int y \, dV}{V} = y_{Gy} \quad (15)$$

Es decir, el punto de aplicación de la fuerza vertical corresponde al centro de gravedad del volumen líquido (real o ficticio).

FUERZA BOYANTE GENERALIZADA

Hace más de 2000 años el gran sabio griego Arquímedes estableció cuál era la resultante de la fuerza de presión actuando sobre un cuerpo sumergido. El resultado se conoce como "principio de Arquímedes" e indica que "todo cuerpo sumergido en un fluido sufre la acción de una fuerza vertical ascendente igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo".

Sabiendo calcular fuerzas de presión sobre superficies curvas es muy fácil demostrar el principio de Arquímedes. Sin embargo, haremos a continuación una demostración más general, válida para cualquier cuerpo sumergido en un fluido en un campo de fuerzas místicas.



Consideremos el cuerpo sumergido de la figura. La resultante de la fuerza de presión actuando sobre su superficie es:

$$\vec{F}_p = \int_S -p d\vec{S} = - \int_S p \hat{n} dS \quad (16)$$

(El signo (-) en la Ec. 16 surge porque la fuerza actúa en la dirección de $-\hat{n}$).

Apliquemos el teorema de Gauss a la última integral:

$$\int_S p \hat{n} dS = \int_V \nabla p dV \quad (17)$$

La ecuación de equilibrio estático relaciona ∇p con las fuerzas masivas:

$$\nabla p = \rho \vec{f}_m \quad (18)$$

Luego Ecs. 18, 17 y 16:

$$\vec{F}_p = - \int_V \rho \vec{f}_m dV \quad (19)$$

La Ec. 19 puede ser llamada "Principio de Arquímedes Generalizado". Si el campo de fuerzas corresponde al gravitacional; $\vec{f}_m = -g \hat{k}$ y la Ec. 19 se reduce a:

$$\vec{F}_p = \int_V \rho g dV \hat{k} \quad (20)$$

Ec. 20 indica que la fuerza de presión actuando sobre el cuerpo sumergido es igual al peso de un volumen de agua igual al volumen sumergido y actúa en la dirección vertical. $\vec{F}_p$ se denomina empuje.

Calculemos ahora el momento de la fuerza de presión:

$$\vec{M} = - \int_S \vec{x} \times \hat{n} p dS = \int_S \hat{n} \times \vec{x} p dS \quad (21)$$

Aplicando nuevamente el teorema de Gauss

$$\int_S \hat{n} \times \vec{x} p dS = \int_V \nabla \times (\vec{x} p) dV \quad (22)$$

$$\text{Pero } \nabla \times (\vec{x} p) = (\nabla \times \vec{x}) p + \nabla p \times \vec{x}$$

$$\text{Pero } \nabla \times \vec{x} = 0, \text{ por lo que } \nabla \times (\vec{x} p) = \nabla p \times \vec{x} \quad (23)$$

$$\text{Ec. 23: } \nabla p \times \vec{x} = \rho \vec{f}_m \times \vec{x} \quad (24)$$

Ecs. 24, 22 y 21:

$$\vec{M} = - \int_V \vec{x} \times \vec{f}_m \rho dV \quad (25)$$

Notar que si p es uniforme $\nabla p = 0$, $\vec{f}_m = 0$, por lo que $\vec{F}_p = 0$ y $\vec{M} = 0$. Un ejemplo típico de presión uniforme corresponde a la que ejerce un gas. En este caso las fuerzas másicas son despreciables.

Es fácil ver que, en un campo gravitacional, un cuerpo está en equilibrio si su

peso es igual al empuje. El punto por donde pasa la línea de acción del empuje se denomina baricentro. Es fácil ver que el baricentro coincide con el centro de gravedad del volumen de fluido desplazado.