CAPÍTULO 3. ESTÁTICA DE FLUIDOS

3.1. CONCEPTO DE EQUILIBRIO ESTÁTICO

Generalmente la estática de los fluidos se define como el área de la física que trata de los fluidos en reposo o sin movimiento. Sin embargo, esta definición está incompleta y es fácil verlo si analizamos el agua contenida en un vaso que se encuentra en una mesa. Resulta evidente para un observador sentado a la mesa que el agua no se mueve. Pero otro observador, que se encuentre fuera del Sistema Solar concluirá que el agua está en movimiento, junto con la Tierra (con sus movimientos de rotación y traslación), el Sol, etc. etc. Por lo tanto, para que la pregunta esté completa es importante precisar el sistema de referencia. De este modo, para evitar ambigüedades, cuando nos refiramos a fluido en reposo, estaremos significando que no existe movimiento relativo entre las partículas de fluido. Es así como, independientemente de dónde se encuentre el observador del ejemplo anterior, si no hay un desplazamiento relativo de las partículas de agua en el vaso, la conclusión es que el agua está en reposo.

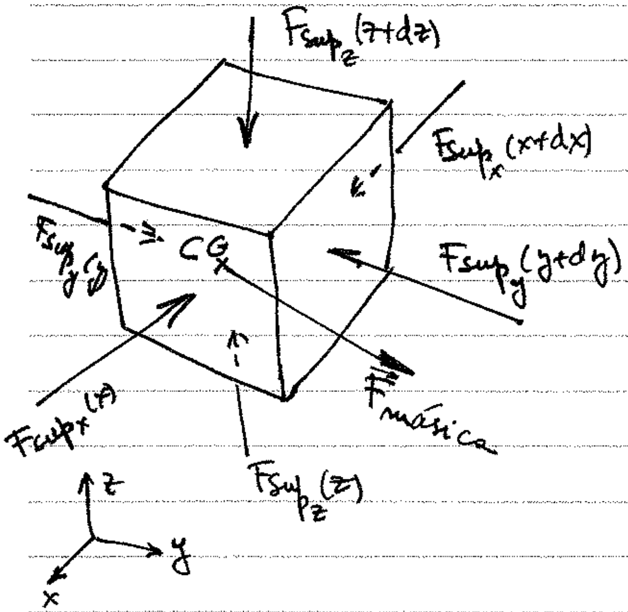
La hidrostática fue desarrollada por Arquímedes (~287-212 a.C) permaneciendo como el principal aporte a la ciencia de los fluidos por más de un milenio y medio.

3.2. ECUACIÓN DE EQUILIBRIO ESTÁTICO

Ya vimos que las fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido pueden dividirse en fuerzas másicas y fuerzas superficiales. Las fuerzas másicas actúan en el centro de gravedad del elemento de fluido y son el resultado de un campo de fuerzas externo. Las fuerzas superficiales actúan sobre las superficies que definen al elemento de fluido y pueden ser normales o tangenciales a la superficie. En el caso de fluidos en reposo, no existen fuerzas tangenciales, pudiendo el fluido resistir sólo las normales, correspondientes a fuerzas de presión.

Consideremos un elemento de volumen de un fluido de densidad ρ, sobre el que actúa un campo de fuerzas externo. El equilibrio de fuerzas indica que la resultante debe ser nula, pudiendo esta resultante separarse en sus componentes superficiales y másica:

$$\vec{F}_{\text{másica}} + \vec{F}_{\text{superf}} = 0 \qquad (1)$$



La fuerza másica podemos escribirla en términos de una fuerza másica por unidad de masa, $\vec{f}_m$:

$$\vec{F}_{másica} = \rho \vec{f}_m \, d\forall \qquad (2)$$

Las fuerzas superficiales, debido a la presión están dadas por:

$$F_{sup\,i} = p\, dS_i \qquad (3)$$

donde i indica la componente de la fuerza y dS_i el elemento de superficie con normal i.

$$\vec{F}_{sup} = \left(F_{sup_x}(x) - F_{sup_x}(x+dx)\right)\hat{i} + \left(F_{sup_y}(y) - F_{sup_y}(y+dy)\right)\hat{j} + \left(F_{sup_z}(z) - F_{sup_z}(z+dz)\right)\hat{k}$$

(Ec. (1)) $\cdot\,\hat{i}$ nos da el equilibrio según la dirección x:

$$\rho f_{mx}\, d\forall + F_{sup_x}(x) - F_{sup_x}(x+dx) = 0 \qquad (4)$$

Expandiendo en series de Taylor y despreciando términos de orden superior:

$$F_{sup_x}(x+dx) \simeq F_{sup_x}(x) + \frac{\partial F_{sup_x}}{\partial x}dx + \ldots \qquad (5)$$

Ec. (3) : $F_{sup_{px}} = p\, dS_x$

$$F_{sup_{px}} = p\, dy\, dz \qquad (6)$$

Ecs. (5) y (6) en (4):

$$\rho f_{mx}\, d\forall + F_{sup_{px}}(x) - F_{sup_{px}}(x) - \frac{\partial p}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = 0$$

Luego
$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_{mx} \qquad (7)$$

Del mismo modo, el equilibrio en las direcciones y, z da:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_{my} \qquad (8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_{mz} \qquad (9)$$

o, equivalentemente:

$$\nabla p = \rho \vec{f}_m \qquad (10)$$

La Ec. (10) (o ecs. (7), (8) y (9)) constituye la ecuación fundamental de la estática de los fluidos.

La fuerza másica más común es la que resulta del campo gravitacional. En este caso:

$$\vec{f}_m = \vec{g} \qquad (11)$$

Si el sistema de referencia se mueve con un movimiento no uniforme, la inercia da origen a una fuerza másica que en su forma más general está dada por:

$$\vec{f}_m = -\vec{a} - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v} \qquad (12)$$

donde $\vec{a}$ es la aceleración (uniforme) del sistema de referencia, el que está girando con velocidad angular $\vec{\omega}$. $\vec{r}$ es la posición de la partícula y $\vec{v}$ su velocidad (en el sistema móvil).

Otra fuerza másica es la originada por campos electromagnéticos, la que está dada por

$$\vec{f}_m = \rho_e \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \qquad (13)$$

donde ρ_e es la carga eléctrica por unidad de volumen, $\vec{E}$ es el campo eléctrico, $\vec{J}$ es el vector densidad de corriente y $\vec{B}$ es el campo magnético.

3.2.1.- CAMPO GRAVITACIONAL

En este caso $\vec{f}_m = \vec{g} = (0, 0, -g)$, por lo que Ec. 10 queda:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad (14)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad (15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \qquad (16)$$

$$\text{Ec. (16)} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow p = -\rho g z + C(x, y) \qquad (17)$$

Ecs. (14) y (15) indican que la constante de integración de la Ec. 17 es una constante pura. Considerando la condición de borde $z = 0$, $p = p_0$, la distribución de presiones queda definida por:

$$p = p_0 - \rho g z \qquad (18)$$

Para obtener la variación lineal de la presión con la profundidad (Ec. 18) se ha supuesto que la densidad es constante, es decir que el fluido es homogéneo e incompresible, característica que cumplen los líquidos en condiciones usuales de trabajo. Que el fluido sea homogéneo significa que sus propiedades, en particular su densidad, no dependen de su posición espacial (ρ es independiente de x, y, z) y que el fluido sea incompresible significa que la densidad no varía con la presión.

Si el líquido es compresible, la Ec.16 debe complementarse con la relación de compresibilidad que describe la dependencia de la densidad con la presión:

$$K = \frac{dp}{\frac{d\rho}{\rho}} \qquad (19)$$

donde K es el módulo de compresibilidad del líquido.

Ec. (19) $\Rightarrow$ $$\frac{dp}{dz} = \frac{K}{\rho}\frac{d\rho}{dz} \qquad (20)$$

Ec. (16) $\Rightarrow$ $$\frac{K}{\rho}\frac{d\rho}{dz} = -\rho g \qquad (21)$$

Integrando con la condición de borde $z=0$, $\rho = \rho_0$ se obtiene la variación de la densidad con la profundidad:

$$\rho = \frac{1}{\frac{1}{\rho_0} - \frac{gz}{K}} \qquad (22)$$

Ec. 22 en Ec. 16:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{-g}{\frac{1}{\rho_0} - \frac{gz}{K}} \qquad (23)$$

Integrando Ec. 23 con la condición de borde $z=0$, $p=p_0$ resulta:

$$p = p_0 + K \ln\left(1 - \frac{\rho_0 g z}{K}\right) \qquad (24)$$

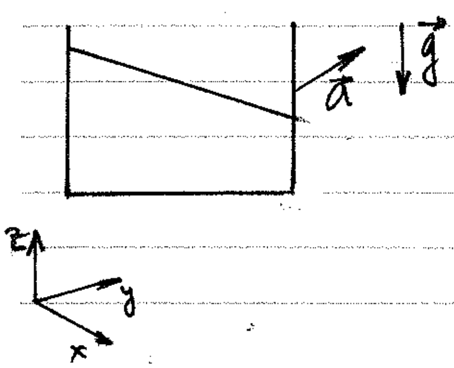
Notar que para z pequeño $\ln\left(1-\frac{\rho_0 g z}{K}\right) \approx -\frac{\rho_0 g z}{K}$ y la Ec. 24 se aproxima a $p = p_0 - \rho_0 g z$, recuperándose la Ec. 18.

Las isóbaras en el campo gravitacional corresponden a planos horizontales, independientemente si el fluido es compresible o no. Esto se ve fácilmente al hacer $p=$ constante en las Ecs. (18) o (24):

$$\text{Ec. (18)}: \qquad C = p_0 - \rho g z \Rightarrow z = C' \qquad (25)$$

$$\text{Ec. (24)}: \qquad C = p_0 + K \ln\left(1 - \frac{\rho_0 g z}{K}\right) \Rightarrow z = C'' \qquad (26)$$

3.2.2. CAMPO DE FUERZAS DEBIDO A UNA ACELERACIÓN SUPERPUESTA AL CAMPO GRAVITACIONAL



Este caso corresponde, por ejemplo, al de un líquido contenido en un recipiente que se desplaza con una aceleración $\vec{a}$, referida a la superficie terrestre.

De la Ec. (12) es fácil ver que el campo de fuerzas másicas está dado por:

$$\vec{f}_m = -\vec{a} + \vec{g} \tag{27}$$

Luego: $\nabla p = \rho \vec{f}_m$ conduce a:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x \tag{28}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho a_y \tag{29}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho (a_z + g) \tag{30}$$

Integrando Ec. 28 : $p = -\rho a_x x + C_1(y, z)$ (31)

Igualando la derivada con respecto a y de la Ec. 31 con la Ec. 29:

$$\frac{\partial C_1}{\partial y} = -\rho a_y \tag{32}$$

Integrando: $C_1 = -\rho a_y y + C_2(z)$ (33)

Ecs. 31 y 33 : $p = -\rho a_x x - \rho a_y y + C_2(z)$ (34)

Igualando la derivada con respecto a z de la Ec 34 con Ec. 30 :

$$\frac{\partial C_2}{\partial z} = -\rho (a_z + g) \tag{35}$$

$$C_2 = -\rho (a_z + g) + C \tag{36}$$

luego: $$p = -\rho a_x x - \rho a_y y - \rho(a_z+g)z + C \qquad (37)$$

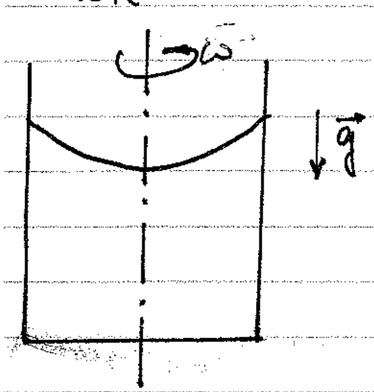
donde la constante C se determina a partir de las condiciones de borde.

Si en $\vec{x} = \vec{x}_0$, $p = p_0$, la Ec. 37 se transforma en:

$$p = p_0 - \rho a_x(x - x_0) - \rho a_y(y - y_0) - \rho(a_z+g)(z - z_0) \qquad (38)$$

Es fácil ver que las isóbaras corresponden a planos inclinados respecto a la horizontal.

3.2.3.- CAMPO CENTRÍFUGO SUPERPUESTO AL GRAVITACIONAL



Corresponde al caso de un fluido en un recipiente que gira con velocidad angular constante, ω, en el campo gravitacional. Para la configuración de la figura las fuerzas másicas quedan definidas a partir de:

$$\vec{f}_m = \omega^2 r \,\hat{r} - g\hat{k} \qquad (39)$$

En coordenadas cilíndricas:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k} \qquad (40)$$

De este modo:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r \quad (41)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad (42)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (43)$$

Integrando resulta:

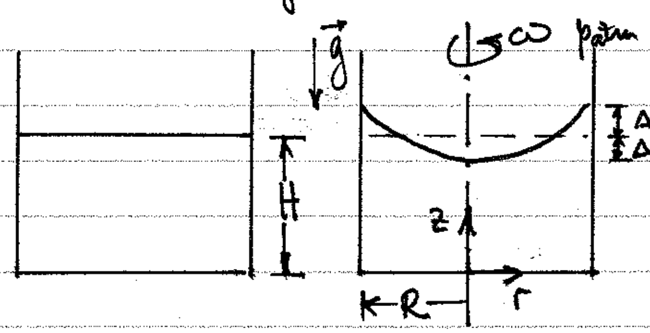
$$p = \frac{1}{2}\rho \omega^2 r^2 - \rho g z + C \quad (44)$$

considerando que $p = p_0$ para $r = r_0$ y $z = z_0$, la ecuación anterior queda:

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho \omega^2 (r^2 - r_0^2) - \rho g (z - z_0) \quad (45)$$

Las isóbaras corresponden a paraboloides de revolución.

APLICACIÓN: Determinar el máximo descenso de la superficie libre de un fluido contenido en un recipiente cilíndrico que gira sobre su eje de simetría. La altura del líquido cuando el recipiente no gira es H.



Trabajando con presiones relativas, se tiene que:

$p_0 = 0$ en $r_0 = 0$, $z_0 = H - \Delta$

$p = 0$ en $r = R$, $z = H + \Delta_1$

Ec 45 : $\quad 0 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2 - \rho g\left(H+\Delta_1 - (H-\Delta)\right)$

$$\frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2 = \rho g(\Delta_1 + \Delta)$$

Para determinar Δ_1 y Δ_2 usamos el hecho que el volumen de líquido es igual al de la situación sin rotar: $\pi R^2 H$. Recordando que el volumen de un paraboloide de revolución es la mitad del volumen del cilindro que lo circunscribe, se tiene :

$$\pi R^2 H = \pi R^2 (H-\Delta) + \frac{1}{2}\pi R^2(\Delta+\Delta_1) \Rightarrow \Delta = \Delta_1$$

Luego: $\quad \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2 = 2\rho g\Delta$

de donde resulta que el máximo descenso está dado por:

$$\Delta = \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

AEROSTÁTICA

Consideremos ahora la atmósfera como medio fluido. En este caso, la densidad no puede considerarse constante, siendo necesario incorporar la dependencia entre ρ y p.

Supongamos que el aire se comporta como gas ideal:

$$\frac{p}{\rho} = RT \qquad (1)$$

En la Ec (1) la temperatura es función de la altura (z). En el campo gravitacional se cumple:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad (2)$$

Luego Ecs. (1) y (2):

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pg}{RT} \qquad (3)$$

Halley consideró que la temperatura era constante, e igual a T_0.

Ec.(3):

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT_0}\,dz \qquad (4)$$

Integrando $\ln p = -\frac{g}{RT_0} z + C.$

Si para $z=0$, $p=p_0 \Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{gz}{RT_0}$

De donde se obtiene la variación de la presión del aire con la altura:

$$p = p_0 \, e^{-\frac{gz}{RT_0}} \qquad (5)$$

La Ec-(5) se conoce como "Ley de Halley". Notar que como existe un proceso termodinámico asociado (isotérmico), las presiones y temperatura deben ser absolutas.

Una mejor aproximación que la que hizo Halley es considerar una disminución lineal de la temperatura con la distancia:

$$T = T_0 - \alpha z \qquad (6)$$

La Ec-6 es válida hasta aproximadamente unos 15 km sobre el nivel del mar. El coeficiente α toma el valor $\alpha \approx 6{,}5\,°K/km$.

Reemplazando la Ec(6) en Ec(3):

$$\frac{dp}{dz} = \frac{-pg}{R(T_0 - \alpha z)} \qquad (7)$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R}\frac{dz}{(T_0-\alpha z)}$$

Integrando y considerando que en $z=0$, $p=p_0$ y $T=T_0$ se tiene:

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{g}{\alpha R}\ln\left(\frac{T_0-\alpha z}{T_0}\right)$$

$$p = p_0\left(\frac{T_0-\alpha z}{T_0}\right)^{\frac{g}{\alpha R}} \qquad (8)$$

Otra relación puede encontrarse al suponer que la atmósfera se comporta adiabáticamente y considerando la variación de la aceleración de gravedad con la altura. Estas consideraciones se traducen en las siguientes relaciones:

$$\frac{p}{\rho^k} = cte. \qquad (9)$$

$$g = \frac{g_0}{(1+z/R)^2} \qquad (10)$$

donde R es el radio de la Tierra y g_0 es la aceleración de gravedad en el nivel medio del mar (donde se toma el origen de coordenadas, $z=0$).

Ec. (9):

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/k} \qquad (11)$$

Reemplazando Ecs. (10) y (11) en Ec. (2):

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{g_0 \rho_0 p^{1/k}}{p_0^{1/k} (1 + z/R)^2} \qquad (12)$$

Integrando Ec. (12) y usando la condición de borde $z = 0$, $p = p_0$, resulta:

$$p = \left[p_0^{\frac{k-1}{k}} - \frac{g_0 (k-1)}{k\, p_0^{1/k}} \frac{\rho_0 z}{(1 + z/R)}\right]^{k/k-1} \qquad (13)$$