UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Métodos Lógicos para Ciencia de la Computación - CC51N
Guía 3

1. Demuestre que si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son teorías, entonces $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ es una teoría.

2. Demuestre que si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son teorías y $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, entonces $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ es una teoría.

3. ¿Es cierto que si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son teorías, entonces $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ es una teoría?

4. ¿Es cierto que si $\mathcal{T}$ es una teoría, entonces el complemento de $\mathcal{T}$ es una teoría?

5. Asuma que $\mathcal{T}$ satisface lo siguiente: Para cada entero $n \geq 0$ existe un entero $n' \geq n$ tal que existe una estructura de cardinalidad n' en $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$.

   Use compacidad para demostrar que $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ contiene al menos una estructura infinita.

6. Use el ejercicio anterior para demostrar que no existe una teoría $\mathcal{T}$ tal que $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ si y sólo si $\mathfrak{A}$ es una estructura finita.

7. Sea Σ el conjunto de fórmulas $\{\, \phi_n \mid n \geq 0 \,\}$, donde para cada $j \geq 0$, $\mathfrak{A} \models \phi_j$ si y sólo si $\mathfrak{A}$ contiene al menos j elementos.

   Demuestre que $\mathcal{T}(\Sigma)$ es una teoría completa (Una opción para demostrar esto sería usar juegos de EF).

8. Demuestre que existen estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ que satisfacen $\mathcal{T}((\mathbb{N}, 0, S))$, tales que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son elementalmente equivalentes pero no isomorfas.

9. Demuestre que para cada fórmula $\phi(x)$ el conjunto $\{\, a \mid (\mathbb{N}, 0, S) \models \phi(a) \,\}$ es finito o su complemento es finito.

10. Asuma que $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\mathcal{T}(\Sigma))$, para un conjunto de oraciones Σ, y que $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\mathcal{T}(\phi))$, para una oración ϕ. Usando compacidad demuestre que $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\mathcal{T}(\Sigma_0))$, para un conjunto finito Σ_0 tal que $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

11. Sea $(T_i)_{i \geq 0}$ una secuencia de teorías, tal que para cada $i \geq 0$, $T_i \subseteq T_{i+1}$. Demuestre que $\bigcup_{i \geq 0} T_i$ no es finitamente axiomatizable.

12. Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario que sólo contiene un predicado unario U. Demuestre que no existe una fórmula ϕ tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \phi$ si y sólo si el número de elementos $a \in A$ que pertenecen a $U^{\mathfrak{A}}$ es par.

13. Demuestre usando juegos de EF que las siguientes propiedades no son expresables en lógica de primer orden sobre grafos finitos:

    - El grafo es conexo.

- El grafo contiene un clique de tamaño $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, donde n es el número de nodos.
- El grafo es 3-coloreable.
- El grafo es un árbol.

14. Demuestre usando juegos de EF que el lenguaje regular $(aa)^*$ no es definible en lógica de primer orden sobre la clase de las palabras.