UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

Lógica para Ciencia de la Computación - CC51N
Guía 2

1. Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$ un lenguaje utilizado para representar grafos. En cada una de las siguientes preguntas escriba una $\mathcal{L}$-oración que represente la propiedad mencionada. En otras palabras, escriba una $\mathcal{L}$-oración ϕ tal que una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ satisface ϕ si y sólo si $\mathfrak{A}$ tiene la propiedad mencionada (o en términos de definibilidad de una clase de estructuras: Sea $\mathcal{K}$ el subconjunto de $\mathcal{L}$-estructuras que satisfacen la propiedad mencionada. Demuestre que $\mathcal{K}$ es definible).

   (a) El grafo es un clique.

   (b) El grafo contiene un clique con 4 nodos.

   (c) El grafo tiene un ciclo con 4 nodos.

   (d) Existen elementos en el grafo cuya distancia es 4.

   (e) La distancia máxima entre dos nodos del grafo es 3.

2. Sea $\mathcal{L} = \{f(\cdot), c\}$, donde f es una función unaria, y sean φ_1, φ_2, φ_3 las siguientes $\mathcal{L}$-oraciones:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \forall x \forall y\ (f(x) = f(y) \rightarrow x = y), \\ \varphi_2 &= \forall x (f(x) \neq c), \\ \varphi_3 &= \forall x (x \neq c \rightarrow \exists y\ f(y) = x). \end{aligned}$$

   (a) Muestre una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}_1$ tal que $\mathfrak{A}_1 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$.

   (b) Muestre una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}_2$ tal que $\mathfrak{A}_2 \models \neg\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$.

   (c) Muestre una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}_3$ tal que $\mathfrak{A}_3 \models \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \wedge \varphi_3$.

   (d) Muestre una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}_4$ tal que $\mathfrak{A}_4 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \neg\varphi_3$.

3. Al igual que en la lógica proposicional, decimos que dos oraciones φ y ψ son *equivalentes*, denotado como $\varphi \equiv \psi$, si para toda estructura $\mathfrak{A}$ se tiene que: $\mathfrak{A} \models \varphi$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \psi$.

   ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son válidas? Justifique su respuesta.

   (a) $\forall x\, \varphi \ \equiv\ \neg\exists x \neg\varphi$.

   (b) $\exists x\, \varphi \ \equiv\ \neg\forall x \neg\varphi$.

   (c) $\exists x\, (\varphi \vee \psi) \ \equiv\ (\exists x\, \varphi) \vee (\exists x\, \psi)$.

   (d) $\forall x\, (\varphi \vee \psi) \ \equiv\ (\forall x\, \varphi) \vee (\forall x\, \psi)$.

   (e) $\exists x\, (\varphi \wedge \psi) \ \equiv\ (\exists x\, \varphi) \wedge (\exists x\, \psi)$.

   (f) $\forall x\, (\varphi \wedge \psi) \ \equiv\ (\forall x\, \varphi) \wedge (\forall x\, \psi)$.

4. Al igual que en la lógica proposicional, decimos que una oración φ es *consecuencia lógica* de un conjunto de oraciones Σ, denotado como $\Sigma \models \varphi$, si para cada estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi$.

   ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son válidas? Justifique su respuesta.

   (a) $\{\forall x \exists y\, R(x, y)\} \models \exists x \forall y\, R(x, y)$.
   (b) $\{\exists x \forall y\, R(x, y)\} \models \forall x \exists y\, R(x, y)$.
   (c) $\{\forall x \forall y\, (R(x, y) \to R(y, x)),\ \forall x \forall y \forall z\, ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \to R(x, z))\} \models \forall x\, R(x, x)$.
   (d) $\{\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))\} \models (\exists x\, P(x)) \wedge (\exists x\, Q(x))$.
   (e) $\{\exists x\, P(x),\ \exists y\, Q(y))\} \models \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$.
   (f) $\{\forall x \exists y\, S(x, y)\} \models \exists y\, S(y, y)$.

5. Sean α y β dos $\mathcal{L}$-fórmulas. Demuestre que

$$\{\ \forall x(\alpha \to \beta),\ \forall x \alpha\ \} \models \forall x \beta.$$

6. Sea ϕ una $\mathcal{L}$-fórmula. Demuestre que ϕ es válida si y sólo si $\forall x \phi$ es válida.

7. Demuestre que al igual que en el caso de la lógica proposicional, si Σ es un conjunto de oraciones y φ es una oración, entonces $\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ no es satisfacible.

8. Sea Σ un conjunto de $\mathcal{L}$-oraciones, tal que para cualquier otra $\mathcal{L}$-oración α se tiene que $\Sigma \models \alpha$ o que $\Sigma \models \neg\alpha$.

   Asuma que $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$-estructura tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$. Demuestre que para toda $\mathcal{L}$-oración α se tiene que $\mathfrak{A} \models \alpha$ o que $\mathfrak{A} \models \neg\alpha$, y que $\mathfrak{A} \not\models \alpha \wedge \neg\alpha$.

9. Sea $\mathcal{L} = \{<, P_a, P_b\}$ un vocabulario, donde $<$ es una relación binaria, y P_a, P_b son relaciones unarias. Sea $\mathcal{K}$ el subconjunto de las $\mathcal{L}$-estructuras que representan palabras sobre el alfabeto $\{a, b\}$.

   - Demuestre que existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\phi_{\text{primero}}(x)$, tal que $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \phi_{\text{primero}}(x)$ si y sólo si $\sigma(x)$ es el primer elemento de la palabra representada por w.
   - Demuestre que existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\phi_{\text{último}}(x)$, tal que $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \phi_{\text{último}}(x)$ si y sólo si $\sigma(x)$ es el último elemento de la palabra representada por w.
   - Demuestre que existen $\mathcal{L}$-oraciones que definen los siguientes lenguajes regulares sobre el alfabeto $\{a, b\}$ (Es decir, demuestre que para cada lenguaje regular $\mathcal{R}$ presentado a continuación existe una fórmula ψ tal que $\mathfrak{A} \models \psi$ si y sólo si $\mathfrak{A}$ representa a alguna palabra en $\mathcal{R}$): (1) a, (2) a^+, (3) $a \cup b$, (4) $(ab)^+$, (5) $(a^+)b$, (6) $(\{a, b\}^+)a(\{a, b\}^+)b$, (7) $((a^+)b) \cup b^+$.
   - Demuestre que existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\alpha(x)$, tal que $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \alpha(x)$ si y sólo si w es la palabra representada por $\mathfrak{A}$, $\sigma(x)$ es alguna posición de w que tiene a la letra b y toda posición de w mayor que $\sigma(x)$ tiene a la letra a.

10. Demuestre que el teorema de compacidad falla para la lógica de primer orden si sólo consideramos modelos finitos. Es decir, demuestre que existe un conjunto Σ de oraciones de primer orden, tal que cada subconjunto finito de Σ es satisfacible por una estructura de cardinalidad finita, pero que Σ mismo no es satisfacible por una estructura de cardinalidad finita.

11. ¿Son las estructuras $\langle \mathbb{N}, 0 \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, 0 \rangle$ isomorfas?

12. Demuestre que las estructuras $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ no son isomorfas.

13. ¿Son las estructuras $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ y $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ isomorfas? ¿Y qué sucede en el caso de $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$ y $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$?

14. ¿Son las estructuras $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ isomorfas? ¿Y qué sucede en el caso de $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$?

15. Demuestre que $S = \{0\}$ no es definible en $\langle \mathbb{N} \rangle$.

16. Demuestre que la función sucesor no es definible en $\langle \mathbb{N}, 0 \rangle$.

17. Demuestre que la función sucesor es definible en $\langle \mathbb{N}, + \rangle$.

18. Demuestre que la función $+$ no es definible en $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$.

19. Demuestre que la función 2^n no es definible en $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$.

20. Demuestre que la relación de orden $<$ es definible en $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$, pero que no es definible en $\langle \mathbb{R}, + \rangle$.

21. Demuestre que la relación de orden $<$ no es definible en $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$.

22. Demuestre que la función exponencial e^x no es definible en $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$.

23. Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario cualquiera. Demuestre usando el teorema de compacidad que no existe un conjunto Σ de $\mathcal{L}$-oraciones tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ se tiene que: $\mathfrak{A}$ es finita si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$ para cada $\varphi \in \Sigma$.

24. Un *homomorfismo* de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ es una función $h : A \to B$, tal que:

    - Para cada constante c en el vocabulario, $c^{\mathfrak{B}} = h(c^{\mathfrak{A}})$.
    - Para cada función n-aria f en el vocabulario, y tupla $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$,

    $$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \ = \ f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

    - Para cada relación m-aria R en el vocabulario, y tupla $(a_1, \ldots, a_m) \in A^m$,

    $$(a_1, \ldots, a_m) \in R^{\mathfrak{A}} \ \Leftrightarrow \ (h(a_1), \ldots, h(a_m)) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

    Asuma que h es un homomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$, y σ una asignación para $\mathfrak{A}$. Demuestre lo siguiente:

    - Para todo término t se tiene que $h(\hat{\sigma}(t)) = \widehat{h \circ \sigma}(t)$.
    - Para cualquier fórmula ϕ sin cuantificadores y que no menciona al símbolo de igualdad,

    $$(\mathfrak{A}, \sigma) \models \phi \ \Leftrightarrow \ (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models \phi.$$

    - Si h es uno a uno, entonces para cualquier fórmula ϕ sin cuantificadores,

    $$(\mathfrak{A}, \sigma) \models \phi \ \Leftrightarrow \ (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models \phi.$$

25. Decimos que $\mathfrak{A}$ es una *subestructura* de $\mathfrak{B}$ si $A \subseteq B$, y la función $h : A \to B$ definida como $h(a) = a$ es un homomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

    Asuma que $\mathfrak{A}$ es una subestructura de $\mathfrak{B}$, y que ϕ es una oración de la forma $\exists x_1 \ldots \exists x_n \alpha$, donde α es una fórmula sin cuantificadores. Demuestre que si $\mathfrak{A} \models \phi$ entonces $\mathfrak{B} \models \phi$.

26. Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot,\cdot),\ a,\ b\}$, donde a y b son constantes. Demuestre usando el teorema de compacidad que no existe una $\mathcal{L}$-oración φ tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ se tiene que: Existe un camino de largo finito en $\mathfrak{A}$ desde a a b si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$.