Expresividad de las Lógicas Temporales
IIC3800

Pablo Barceló

Intuición sobre expresividad de CTL^*

Intuitivamente, existen propiedades de los sistemas de transición que no pueden expresarse en CTL^*. Por ejemplo:

- Un estado tiene dos sucesores.
- El sistema de transición no tiene ciclos.

¿Cómo podemos confirmar nuestra intuición al respecto?

Primero debemos definir una relación de equivalencia entre sistemas de transición, llamada bisimulación.

La noción de bisimulación

Sean $\mathcal{M} = (E, R, (P_a)_{a\in\Sigma})$ y $\mathcal{M}' = (E', R', (P'_a)_{a\in\Sigma})$ dos sistemas de transición.

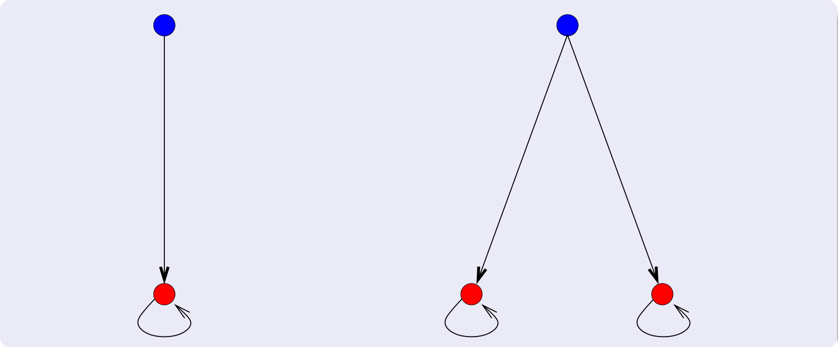
Una bisimulación entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$ es una relación binaria $\mathcal{W} \subseteq E \times E'$, tal que para cada $(e, e') \in \mathcal{W}$:

- $e \in P_a \Leftrightarrow e' \in P'_a$, para cada $a \in \Sigma$;
- para cada e_0 tal que $R(e, e_0)$, existe e'_0 tal que $R'(e', e'_0)$ y $(e_0, e'_0) \in \mathcal{W}$; y
- para cada e'_0 tal que $R'(e', e'_0)$, existe e_0 tal que $R(e, e_0)$ y $(e_0, e'_0) \in \mathcal{W}$.

Si existe una bisimulación $\mathcal{W}$ entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$ tal que $(e, e') \in \mathcal{W}$, escribimos $(\mathcal{M}, e) \sim (\mathcal{M}', e')$.

Un ejemplo

Entre los siguientes sistemas de transición existe una bisimulación:



Propiedades

Definimos formalmente una propiedad como una función $\mathcal{P}$ que asigna a cada sistema de transición $\mathcal{M}$ un subconjunto de sus estados (es decir, los estados que satisfacen $\mathcal{P}$), y que es cerrada bajo isomorfismo.

Ejemplo: Una propiedad es la de "tener dos sucesores". Es la función $\mathcal{P}_{2s}$ tal que

$$\mathcal{P}_{2s}(\mathcal{M}) \ = \ \{e \in \mathcal{M} \ | \ e \text{ tiene dos sucesores en } \mathcal{M}\}.$$

Ejemplo: Otra propiedad es $\mathcal{P}_{\mathbf{EG}a}$ tal que

$$\mathcal{P}_{\mathbf{EG}a}(\mathcal{M}) \ = \ \{e \in \mathcal{M} \ | \ (\mathcal{M}, e) \models \mathbf{EG}a\}.$$

Propiedades invariantes bajo bisimulación

Una propiedad $\mathcal{P}$ es invariante bajo bisimulación, si para cualquier par de sistemas de transición $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$, y estados $e \in \mathcal{M}$ y $e \in \mathcal{M}'$,

$$(\mathcal{M}, e) \sim (\mathcal{M}', e') \quad \Rightarrow \quad (e \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \text{ iff } e' \in \mathcal{P}(\mathcal{M}')).$$

Propiedades invariantes bajo bisimulación

Una propiedad $\mathcal{P}$ es invariante bajo bisimulación, si para cualquier par de sistemas de transición $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$, y estados $e \in \mathcal{M}$ y $e \in \mathcal{M}'$,

$$(\mathcal{M}, e) \sim (\mathcal{M}', e') \quad \Rightarrow \quad (e \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \text{ iff } e' \in \mathcal{P}(\mathcal{M}')).$$

Con los ejemplos anteriores podemos demostrar fácilmente que $\mathcal{P}_{2s}$ no es invariante bajo bisimulación.

Propiedades invariantes bajo bisimulación

Una propiedad $\mathcal{P}$ es invariante bajo bisimulación, si para cualquier par de sistemas de transición $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$, y estados $e \in \mathcal{M}$ y $e \in \mathcal{M}'$,

$$(\mathcal{M}, e) \sim (\mathcal{M}', e') \quad \Rightarrow \quad (e \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \text{ iff } e' \in \mathcal{P}(\mathcal{M}')).$$

Con los ejemplos anteriores podemos demostrar fácilmente que $\mathcal{P}_{2s}$ no es invariante bajo bisimulación.

¿Es $\mathcal{P}_{\mathbf{EG}a}$ invariante bajo bisimulación? Intuitivamente sí, aunque parece más difícil de demostrar.

CTL^* y bisimulación

Sea ϕ una fórmula en CTL^*. Definimos $\mathcal{P}_\phi$ como

$$\mathcal{P}_\phi(\mathcal{M}) \;=\; \{\mathsf{e} \in \mathcal{M} \;\mid\; (\mathcal{M}, \mathsf{e}) \models \phi\}.$$

Teorema

Toda propiedad de la forma $\mathcal{P}_\phi$, donde ϕ es una fórmula en CTL^*, es invariante bajo bisimulación.

Por tanto, no existe fórmula ϕ en CTL^* tal que $\mathcal{P}_{2s} = \mathcal{P}_\phi$.

Ahora demostraremos el teorema por inducción en el número de cuantificadores de camino anidados la fórmula.

El número de cuantificadores de camino anidados ($\#_c$) en una fórmula de estado ϕ en CTL* se define como sigue:

- Si $\phi = a$ entonces $\#_c(\phi) = 0$.
- Si $\phi = \neg\psi$ entonces $\#_c(\phi) = \#_c(\psi)$.
- Si $\phi = \psi \vee \psi'$ entonces $\#_c(\phi) = \max\{\#_c(\psi), \#_c(\psi')\}$.
- Si $\phi = \mathbf{E}\psi$ entonces es

$$\#_c(\phi) = \max\{\#_c(\alpha) \ \mid\ \alpha \text{ subfórmula de estado de } \psi\} + 1.$$

Asuma $\mathcal{M} = (E, R, (P_a)_{a\in\Sigma})$, $\mathcal{M}' = (E', R', (P'_a)_{a\in\Sigma})$, y $(\mathcal{M}, e) \sim (\mathcal{M}', e')$ mediante bisimulación $\mathcal{W}$.

Caso $\#_c(\phi) = 0$: La fórmula no tiene cuantificación, y por tanto, ϕ es una combinación Booleana de proposiciones atómicas en Σ. Pero ya que $(e, e') \in \mathcal{W}$,

$$e \in P_a \quad \Leftrightarrow \quad e' \in P'_a, \quad \text{para todo } a \in \Sigma,$$

y concluimos que $(\mathcal{M}, e) \models \phi \Leftrightarrow (\mathcal{M}', e') \models \phi$.

Caso $\#_c(\phi) = k + 1$: En este caso ϕ es una combinación Booleana de fórmulas $\mathbf{E}\psi$, donde cada subfórmula de estado en ψ tiene a lo más k cuantificadores anidados.

Por tanto, consideramos sólo el caso $\phi = \mathbf{E}\psi$, para ψ fórmula de camino.

CTL^* y bisimulación: Demostración del teorema

El problema es que para ψ la inducción falla porque no es fórmula de estado. ¿Qué hacemos ahora ...?

CTL^* y bisimulación: Demostración del teorema

El problema es que para ψ la inducción falla porque no es fórmula de estado. ¿Qué hacemos ahora ...?

... Haremos otra inducción dentro de ésta, pero ahora sobre fórmulas de camino (tendremos que ocupar nuestra hipótesis de inducción ahí).

CTL^* y bisimulación: Demostración del teorema

El problema es que para ψ la inducción falla porque no es fórmula de estado. ¿Qué hacemos ahora ...?

... Haremos otra inducción dentro de ésta, pero ahora sobre fórmulas de camino (tendremos que ocupar nuestra hipótesis de inducción ahí).

Necesitamos para esto un resultado intermedio.

Dos caminos $\pi = e_0 e_1 \cdots$ en $\mathcal{M}$ y $\pi' = e'_0 e'_1 \cdots$ en $\mathcal{M}'$ se corresponden en $\mathcal{W}$, si para todo $i \geq 0$, $(e_i, e'_i) \in \mathcal{W}$.

Lema: Si $(\mathcal{M}, e) \sim (\mathcal{M}', e')$ mediante bisimulación $\mathcal{W}$, entonces para todo camino $\pi = e e_1 \cdots$ en $\mathcal{M}$ existe un camino $\pi' = e' e'_1 \cdots$ en $\mathcal{M}'$ tal que π y π' se corresponden en $\mathcal{W}$, y viceversa.

Ejercicio: Demuestre el lema.

CTL^* y bisimulación: Demostración del teorema

Nos basta entonces demostrar la siguiente proposición por inducción para terminar de demostrar el teorema:

Proposición: Sea $\pi = e_0 e_1 \cdots$ un camino en $\mathcal{M}$ y $\pi' = e_0 e_1' \cdots$ un camino en $\mathcal{M}'$, tal que π y π' se corresponden en $\mathcal{W}$. Para toda fórmula de camino ψ, tal que para cada subfórmula de estado α de ψ se tiene que $\#_c(\alpha) \leq k$, es cierto que $(\mathcal{M}, \pi) \models \psi \Leftrightarrow (\mathcal{M}', \pi') \models \psi$.

Eso es lo que hacemos a continuación.

CTL^* y bisimulación: Demostración del teorema

Caso base: ψ es una fórmula de estado tal que $\#_c(\psi) \leq k$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}, \pi) \models \psi \quad & \Leftrightarrow \quad (\mathcal{M}, e_0) \models \psi \\
& \Leftrightarrow \quad (\mathcal{M}', e_0') \models \psi \quad \text{(por inducción, viene del teorema)} \\
& \Leftrightarrow \quad (\mathcal{M}', \pi') \models \psi
\end{aligned}$$

Caso inductivo: Las combinaciones Booleanas son inmediatas, por lo que sólo consideramos los casos $\psi = \mathbf{X}\theta$ y $\psi = \theta \mathbf{U} \theta'$.

CTL^* y bisimulación: Demostración del teorema

Caso $\psi = \mathbf{X}\theta$: Entonces,

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{M}, \pi) \models \psi \quad & \Leftrightarrow \quad (\mathcal{M}, \pi^1) \models \theta \\
& \Leftrightarrow \quad (\mathcal{M}', (\pi')^1) \models \theta \ \ (\pi^1 \text{ y } (\pi')^1 \text{ se corresponden en } \mathcal{W}) \\
& \Leftrightarrow \quad (\mathcal{M}', \pi') \models \psi
\end{aligned}
$$

Caso $\psi = \theta \mathbf{U} \theta'$: Ejercicio.

Expresividad de LTL vs CTL^*

Demostraremos que CTL^* es estrictamente más expresivo que LTL.

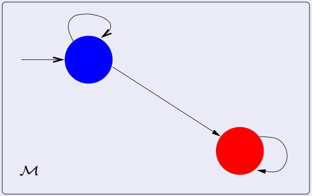
Para ello es suficiente mostrar una fórmula ϕ en CTL^* y dos sistemas de transición $\mathcal{M}$ (con estado e) y $\mathcal{M}'$ (con estado e') tales que:

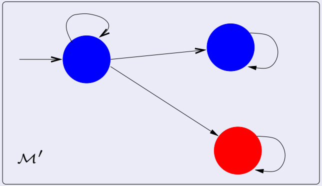
- Para toda fórmula ψ en LTL, $(\mathcal{M}, e) \models \psi \Leftrightarrow (\mathcal{M}', e') \models \psi'$.
- $(\mathcal{M}, e) \models \phi$ pero $(\mathcal{M}', e') \not\models \phi$.

La fórmula a utilizar será $\phi \equiv \mathbf{A}(\mathbf{G}\mathit{azul} \rightarrow \mathbf{GEX}\mathit{rojo})$.

Expresividad de LTL vs CTL*

Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$ como se observan a continuación:





Expresividad de LTL vs CTL^*

Note que $(\mathcal{M}, e) \models \phi$ pero $(\mathcal{M}', e') \not\models \phi$.

Además, $(\mathcal{M}.e)$ y $(\mathcal{M}', e')$ son indistinguibles con fórmulas en LTL (¿Por qué?).