Introducción a las Lógicas Temporales
IIC3800

Pablo Barceló

Model checking

Model checking: Técnica que permite verificar propiedades de sistemas concurrentes en forma automática. Especialmente utilizado en el diseño de circuitos digitales y protocolos de comunicación.

Realiza una búsqueda exhaustiva en el conjunto de estados para ver si una especificación se cumple o no.

El model checking consta de tres partes: modelamiento, especificación, y verificación.

Lógicas temporales

Lógicas temporales: Permiten especificar propiedades dinámicas de un sistema sin introducir el tiempo explícitamente.

La idea es describir secuencias de transiciones entre estados en un sistema que evoluciona en el tiempo.

Ejemplo: "Eventualmente" ocurrirá P, "nunca" ocurrirá P, etc.

Estos "eventualmente", "nunca", etc., son los operadores de los lógica.

Lógicas temporales: Historia

Breve historia de las lógicas temporales:

- Inicialmente propuestas en los 50s para investigaciones filosóficas.
- Pnueli (1977) fue el primero en proponerlas para verificación. El sistema se especificaba como un sistema de axiomas, y se probaban propiedades a partir de estos axiomas.
- Clarke y Emerson (1981) automatizaron este proceso diseñando algoritmos de verificación eficientes para ciertas lógicas temporales.
- Luego comenzó a estudiarse la complejidad de verificación de estas lógicas (model-checking, parametrized complexity, etc).

Sistemas de transición

Las lógicas temporales permiten hablar sobre las transiciones entre estados (es decir, de las secuencias de computación realizadas por el sistema). Los sistemas deben ser modelados entonces como sistemas de transición.

Sistemas de transición

Las lógicas temporales permiten hablar sobre las transiciones entre estados (es decir, de las secuencias de computación realizadas por el sistema). Los sistemas deben ser modelados entonces como sistemas de transición.

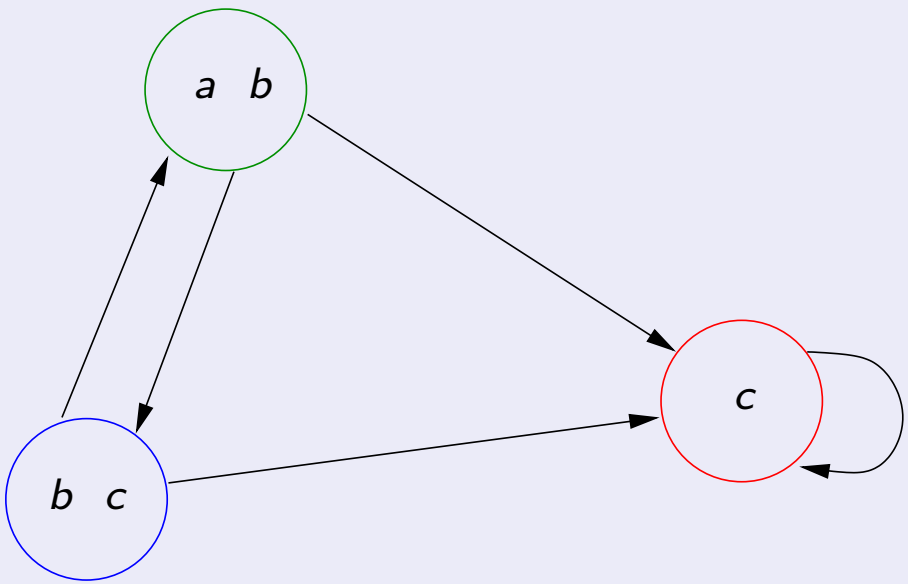
Cuando hablemos de lógicas temporales:

Un sistema de transición (o estructura de Kripke) sobre alfabeto finito Σ es una estructura $\mathcal{M} = (E, (P_a)_{a \in \Sigma}, R)$, donde:

- E es un conjunto finito de elementos (estados),
- cada P_a es una predicado en E, *i.e.* $P_a \subseteq E$, y
- R es una relación binaria en E (llamada relación de transición), tal que para cada $e \in S$ existe $e' \in S$ tal que $R(e, e')$.

Ejemplo de sistema de transición

Ejemplo: $\mathcal{M}_E$ es un sistema de transición sobre alfabeto $\{a, b, c\}$.



Intuición sobre sistemas de transición

El alfabeto representa el conjunto de descripciones atómicas que son relevantes para el sistema. Por ejemplo:

- La impresora no tiene papel, la alarma se ha encendido, etc.

Estas no hacen referencia a la dinámica del sistema.

Cada estado e representa una descripción instantánea del comportamiento del sistema. Si $e \in P_a$ esto quiere decir que la descripción atómica a es cierta en ese instante.

Una transición $R(e, e')$ representa un cambio en el estado del sistema. Una computación de un sistema es una secuencia infinita de sus estados, donde cada estado se obtiene desde el anterior por medio de una transición.

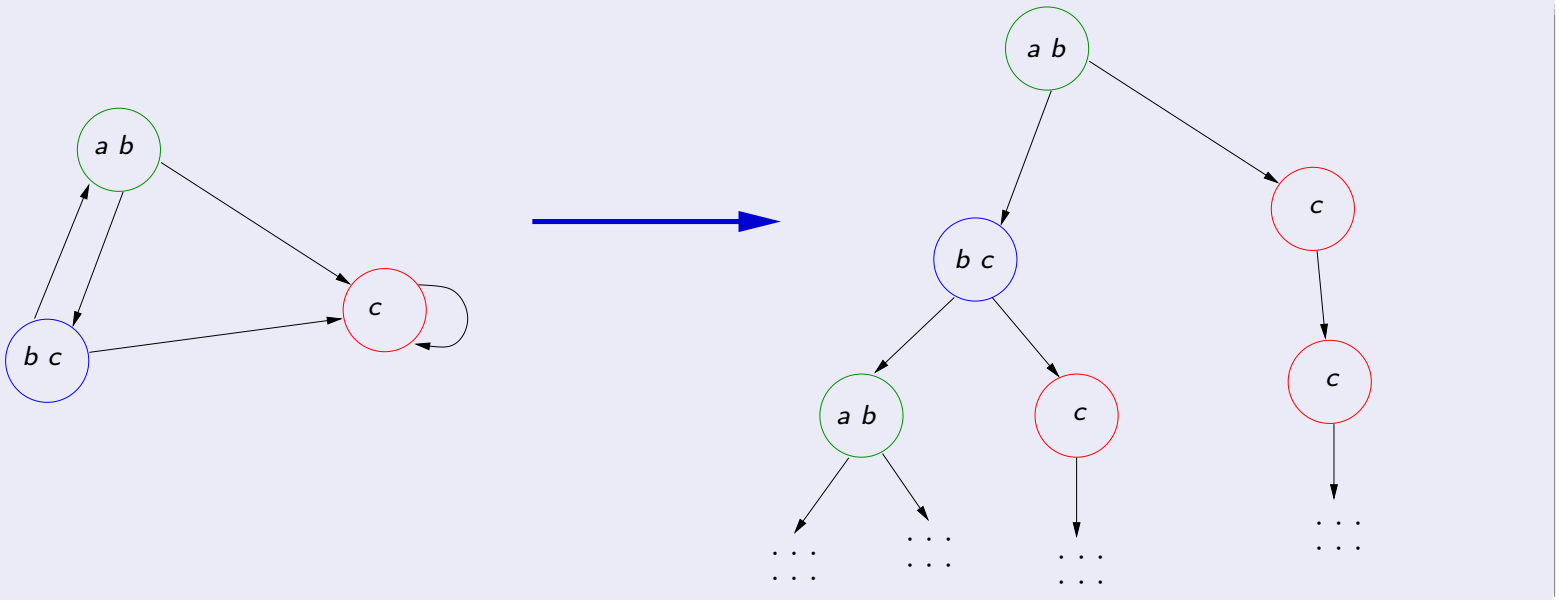
La lógica temporal CTL^*

La primera lógica temporal que veremos es CTL^*. Esta especifica propiedades del árbol de computación de un sistema de transición.

Este árbol (infinito) se obtiene designando a un estado del sistema como la raíz (estado inicial), y muestra todas las posibles computaciones desde ese estado.

La lógica temporal CTL^*

Por ejemplo, el árbol de transición para $\mathcal{M}_E$ designando al estado verde es el siguiente:



La lógica temporal CTL^*

CTL^* está compuesta por operadores temporales y cuantificación sobre caminos.

La cuantificación sobre caminos está dada por los cuantificadores **A** (para todo camino) y **E** (existe un camino).

Estos cuantificadores son utilizados en un estado particular del sistema de transición, y evaluadas sobre el árbol de computación relacionado con ese estado.

La lógica temporal CTL^*

Los operadores temporales sirven para describir propiedades de un camino en el árbol de computación.

Usamos 4 operadores básicos:

- **X** (próximo estado): unario.
- **F** (en el futuro): unario.
- **G** (siempre en el futuro): unario.
- **U** (algo ocurre hasta que otra cosa ocurre): binario.

Sintáxis de CTL^*

La lógica consiste en fórmulas de estado (que se evalúan en un estado del sistema) y de camino (que se evalúan en una rama del árbol).

Sintáxis de CTL^*

La lógica consiste en fórmulas de estado (que se evalúan en un estado del sistema) y de camino (que se evalúan en una rama del árbol).

La sintáxis de las fórmulas de estado sobre alfabeto Σ es como sigue:

- Si $a \in \Sigma$, entonces a es una fórmula de estado.
- Si ϕ, ϕ' son fórmulas de estado, entonces $\neg\phi$, $\phi \wedge \phi'$ y $\phi \vee \phi'$ son fórmulas de estado.
- Si ψ es una fórmula de camino, entonces $\mathbf{E}\psi$ y $\mathbf{A}\psi$ son fórmulas de estado.

Sintáxis de CTL^*

La sintáxis de las fórmulas de camino sobre alfabeto Σ es como sigue:

- Toda fórmula de estado es también una fórmula de camino.
- Si ψ, ψ' son fórmulas de camino, entonces $\neg\psi$, $\psi \wedge \psi'$ y $\psi \vee \psi'$ son fórmulas de camino.
- Si ψ, ψ' son fórmulas de camino, entonces $\mathbf{X}\psi$, $\mathbf{F}\psi$, $\mathbf{G}\psi$, y $\psi\mathbf{U}\psi'$ son fórmulas de camino.

Intuición sobre semántica de CTL^*

Ejercicio: ¿Cómo expresaría las siguientes propiedades en CTL^*?

- En cada camino la proposición *a* ocurre infinitas veces.
- Es posible acceder a un estado donde la proposición *b* es cierta, y desde el cual existe un camino en el que la proposición *a* ocurre finitas veces.

Intuición sobre semántica de CTL^*

Ejercicio: ¿Cómo expresaría las siguientes propiedades en CTL^*?

- En cada camino la proposición *a* ocurre infinitas veces.

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{GF}a).$$

- Es posible acceder a un estado donde la proposición *b* es cierta, y desde el cual existe un camino en el que la proposición *a* ocurre finitas veces.

Intuición sobre semántica de CTL^*

Ejercicio: ¿Cómo expresaría las siguientes propiedades en CTL^*?

- En cada camino la proposición *a* ocurre infinitas veces.

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{GF}a).$$

- Es posible acceder a un estado donde la proposición *b* es cierta, y desde el cual existe un camino en el que la proposición *a* ocurre finitas veces.

Intuición sobre semántica de CTL^*

Ejercicio: ¿Cómo expresaría las siguientes propiedades en CTL^*?

- En cada camino la proposición a ocurre infinitas veces.

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{GF}a\right).$$

- Es posible acceder a un estado donde la proposición b es cierta, y desde el cual existe un camino en el que la proposición a ocurre finitas veces.

$$\mathbf{EF}\left(b \wedge \mathbf{EFG}\neg a\right).$$

Semántica de CTL^*

Para definir la semántica de CTL^* debemos definir primero qué es un camino en un sistema de transición.

Sea $\mathcal{M}$ un sistema de transición. Un camino π sobre $\mathcal{M}$ es una secuencia $e_0 e_1 \cdots$ tal que para cada $i \geq 0$, $(e_i, e_{i+1}) \in R$.

En otras palabras, el camino $e_0 e_1 \cdots$ es una rama del árbol de computación de $\mathcal{M}$ con raíz e_0.

Denotamos por π^i el sufijo de π que empieza en e_i.

Semántica de CTL^*: Fórmulas de estado

Dado sistema de transición $\mathcal{M}$ y estado e:

- $(\mathcal{M}, e) \models a$ si y sólo si $e \in P_a$.
- $(\mathcal{M}, e) \models \neg\phi$ si y sólo si no es el caso que $(\mathcal{M}, e) \models \phi$.
- $(\mathcal{M}, e) \models \phi \vee \phi'$ si y sólo si $(\mathcal{M}, e) \models \phi$ o $(\mathcal{M}, e) \models \phi'$.
- $(\mathcal{M}, e) \models \phi \wedge \phi'$ si y sólo si $(\mathcal{M}, e) \models \phi$ y $(\mathcal{M}, e) \models \phi'$.
- $(\mathcal{M}, e) \models \mathbf{E}\psi$ si y sólo existe un camino π de la forma $ee_1 \cdots$ tal que $(\mathcal{M}, \pi) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, e) \models \mathbf{A}\psi$ si y sólo para todo camino π de la forma $ee_1 \cdots$ se tiene que $(\mathcal{M}, \pi) \models \psi$.

Semántica de CTL^*: Fórmulas de camino

Dado sistema de transición $\mathcal{M}$ y camino π.

- Para fórmula de estado ϕ, $(\mathcal{M}, \pi) \models \phi$ si y sólo si e es el primer estado de π y $(\mathcal{M}, e) \models \phi$.
- $(\mathcal{M}, \pi) \models \mathbf{X}\psi$ si y sólo si $(\mathcal{M}, \pi^1) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, \pi) \models \mathbf{F}\psi$ si y sólo si existe $j \geq 0$ tal que $(\mathcal{M}, \pi^j) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, \pi) \models \mathbf{G}\psi$ si y sólo si para todo $j \geq 0$ se tiene que $(\mathcal{M}, \pi^j) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, \pi) \models \psi \mathbf{U} \psi'$ si y sólo si existe $j \geq 0$ tal que $(\mathcal{M}, \pi^j) \models \psi'$ y para todo $0 \leq k < j$ se tiene que $(\mathcal{M}, \pi^k) \models \psi$.
- Combinaciones Booleanas de fórmulas de camino evaluadas de forma estándar.

Ejemplo de semántica de CTL^*

Ejercicio: Evalúe las siguientes consultas en $(\mathcal{M}_E, e)$, donde e es el nodo verde.

- $\mathbf{EX}c$, $\mathbf{E}(\mathbf{XG}c)$, y $\mathbf{A}((a \vee b)\mathbf{U}c)$.
- $\mathbf{EF}c$, $\mathbf{E}(\mathbf{XG}\neg b \wedge \mathbf{GF}a)$, y $\mathbf{E}\neg\mathbf{F}(\neg a \wedge \neg b \wedge c)$.

Ejemplo de semántica de CTL^*

Ejercicio: Evalúe las siguientes consultas en $(\mathcal{M}_E, e)$, donde e es el nodo verde.

- $\mathbf{EX}c$, $\mathbf{E}(\mathbf{XG}c)$, y $\mathbf{A}((a \vee b)\mathbf{U}c)$.
- $\mathbf{EF}c$, $\mathbf{E}(\mathbf{XG}\neg b \wedge \mathbf{GF}a)$, y $\mathbf{E}\neg\mathbf{F}(\neg a \wedge \neg b \wedge c)$.

Ejemplo de semántica de CTL^*

Ejercicio: Evalúe las siguientes consultas en $(\mathcal{M}_E, e)$, donde e es el nodo verde.

- $\mathbf{EX}c$, $\mathbf{E}(\mathbf{XG}c)$, y $\mathbf{A}((a \vee b)\mathbf{U}c)$.
- $\mathbf{EF}c$, $\mathbf{E}(\mathbf{XG}\neg b \wedge \mathbf{GF}a)$, y $\mathbf{E}\neg\mathbf{F}(\neg a \wedge \neg b \wedge c)$.

Propiedades de CTL^*

Ejercicio: Demuestre que los operadores $\vee, \neg, \mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{E}$ bastan para expresar cada fórmula en CTL^*.

Propiedades de CTL^*

Ejercicio: Demuestre que los operadores $\vee, \neg, \mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{E}$ bastan para expresar cada fórmula en CTL^*.

Otros operadores interesantes pueden ser además definidos:

- ¿Qué significa $\neg(\neg\psi \mathbf{U} \neg\psi')$ (esto se escribe comúnmente como $(\psi \,\mathbf{R}\, \psi')$)?

Propiedades de CTL^*

Ejercicio: Demuestre que los operadores $\vee, \neg, \mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{E}$ bastan para expresar cada fórmula en CTL^*.

Otros operadores interesantes pueden ser además definidos:

- ¿Qué significa $\neg(\neg\psi \mathbf{U} \neg\psi')$ (esto se escribe comúnmente como $(\psi \,\mathbf{R}\, \psi')$)?

¿Qué significa $\mathbf{XF}\psi$? ¿Qué significa $\mathbf{FG}\psi$?

Propiedades de CTL^*

Ejercicio: Demuestre que los operadores $\vee, \neg, \mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{E}$ bastan para expresar cada fórmula en CTL^*.

Otros operadores interesantes pueden ser además definidos:

- ¿Qué significa $\neg(\neg\psi \mathbf{U} \neg\psi')$ (esto se escribe comúnmente como $(\psi \,\mathbf{R}\, \psi')$)?

¿Qué significa $\mathbf{XF}\psi$? ¿Qué significa $\mathbf{FG}\psi$?

¿Cómo podría definirse un operador $\mathbf{U}_s$ tal que $(\mathcal{M}, \pi) \models \psi \mathbf{U}_s \psi'$ si y sólo si existe $j > 0$ tal que $(\mathcal{M}, \pi^j) \models \psi'$ y para todo $0 \leq k < j$, $(\mathcal{M}, \pi^k) \models \psi$?

Pólizas de seguridad (Safety properties)

Un tipo interesante de propiedades expresables en CTL^* son las pólizas de seguridad. Estas dicen que "algo malo nunca ocurrirá" en el sistema:

- La planta nuclear nunca explotará, no ocurrirá una revolución, etc.

Sintácticamente son las propiedades expresadas por fórmulas de la forma **AG**β, donde β es una combinación Booleana de proposiciones atómicas.

Son comúnmente las propiedades más fáciles de verificar en un sistema de verificación.

Pólizas de seguridad (Safety properties)

Ejercicio: Sean $\mathbf{AG}\beta$ y $\mathbf{AG}\beta'$ dos pólizas de seguridad. Demuestre que existe póliza de seguridad $\mathbf{AG}\gamma$ tal que para cada sistema de transición $\mathcal{M}$ y estado e,

$$(\mathcal{M}, e) \models \mathbf{AG}\gamma \;\Leftrightarrow\; (\mathcal{M}, e) \models \mathbf{AG}\beta \wedge \mathbf{AG}\beta'.$$

Pólizas de seguridad (Safety properties)

Ejercicio: Sean $\mathbf{AG}\beta$ y $\mathbf{AG}\beta'$ dos pólizas de seguridad. Demuestre que existe póliza de seguridad $\mathbf{AG}\gamma$ tal que para cada sistema de transición $\mathcal{M}$ y estado e,

$$(\mathcal{M}, e) \models \mathbf{AG}\gamma \;\Leftrightarrow\; (\mathcal{M}, e) \models \mathbf{AG}\beta \wedge \mathbf{AG}\beta'.$$

Ejercicio: ¿Por qué la propiedad $\mathbf{AG}(p \rightarrow \mathbf{AF}q)$ no puede ser expresada como una póliza de seguridad?

Pólizas de seguridad (Safety properties)

Desearíamos que otro tipo de propiedades también fueran pólizas de seguridad. Por ejemplo, "no ocurrirá una revolución a menos que el gobierno sea corrupto", representado por:

$$\mathbf{A}(\neg(\neg \text{corrupto}\, \mathbf{U}\, (\neg \text{corrupto} \wedge \text{revolucion}))).$$

Luego mostraremos como capturar esta clase de propiedades.

CTL: Una restricción de CTL^*

CTL es la restricción de CTL^* que satisface lo siguiente:

- Cada fórmula de camino en CTL debe estar precedida por un cuantificador de caminos **A** o **E**.

Esta lógica se estudia porque combina buenas propiedades de expresividad y complejidad.

En otras palabras, las fórmulas en CTL están dadas por la siguiente gramática:

$$\phi, \phi' \ := \ a \ \mid \ \neg\phi \ \mid \ \phi \vee \phi' \ \mid \ \mathbf{EX}\phi \ \mid \ \mathbf{EG}\phi \ \mid \ \mathbf{E}(\phi \mathbf{U} \phi')$$

CTL: Una restricción de CTL*

Defina $\alpha \mathbf{W} \beta$ como $\neg(\neg\beta \mathbf{U}(\neg\alpha \wedge \neg\beta))$. Esta fórmula es equivalente a $\mathbf{G}\alpha \vee (\alpha \mathbf{U} \beta)$.

Ejercicio: Demuestre que las siguientes fórmulas pueden ser expresadas en CTL:

- $\mathbf{AX}\phi$, $\mathbf{AG}\phi$, $\mathbf{A}(\phi \mathbf{U} \phi')$, $\mathbf{A}(\phi \mathbf{R} \phi')$, y $\mathbf{A}(\phi \mathbf{W} \phi')$.
- $\mathbf{EF}\phi$, $\mathbf{E}(\phi \mathbf{R} \phi')$, y $\mathbf{E}(\phi \mathbf{W} \phi')$.

Una lógica lineal: LTL

LTL es el conjunto de fórmulas de camino de CTL^* que se contruyen sólo a partir de las proposiciones atómicas.

Es decir, LTL es la clase de fórmulas dadas por la siguiente gramtica:

$$\psi, \psi' \ := \ a \ \mid \ \neg\psi \ \mid \ \psi \vee \psi' \ \mid \ \mathbf{X}\psi \ \mid \ \psi \mathbf{U} \psi'$$

Fórmulas en LTL se evalúan de la manera natural sobre secuencias $e_0 e_1 \cdots$ de elementos en Σ.

Para evaluar fórmula ψ en LTL en un estado e de un sistema de transición $\mathcal{M}$:

$(\mathcal{M}, e) \models \psi$ si y sólo si $(\mathcal{M}, e) \models \mathbf{A}\psi$.

Pólizas de seguridad fuertes

Ahora podemos definir una clase más general de pólizas de seguridad.

Una póliza de seguridad fuerte es una fórmula en LTL de la forma β, donde β satisface lo siguiente:

- Si $\pi = e_0 e_1 \cdots$ es una secuencia de elementos en Σ tal que $\pi \not\models \beta$, entonces existe $i \geq 0$ tal que para cualquier secuencia π' de elementos en Σ de la forma $e_0 e_1 \cdots e_i e'_{i+1} e'_{i+2} \cdots$, se tiene que $\pi' \not\models \beta$.

En otras palabras, una póliza de seguridad fuerte es una fórmula en CTL^* cuyo contraejemplo es siempre una secuencia finita de estados.

Pólizas de seguridad fuertes

Ejercicio: Demuestre que toda póliza de seguridad es una póliza de seguridad fuerte.

Teorema

Toda fórmula β en LTL *construida usando sólo las proposiciones atómicas y los operadores* $\vee$, **X**, **G**, *y* **W** *es una póliza de seguridad fuerte.*

Ejercicio: Demuestre el teorema.

Pólizas de vivacidad

Otro tipo de propiedades expresables en LTL son las pólizas de vitalidad. Estas son el complemento de las pólizas de seguridad: Dicen que "algo bueno ocurrirá eventualmente".

- Algún día el tirano morirá, el sistema eventualmente termina, etc.

Por tanto, estas pólizas sólo pueden ser falsificadas por secuencias infinitas de estados.

Ejercicio: Defina formalmente qué es una póliza de vitalidad.

La fórmula $\alpha \equiv (a \wedge \mathbf{XGF}b)$ es una fórmula en LTL que no es una póliza de seguridad fuerte, ni es una póliza de vitalidad.