Autómata = Lógica

Nuestro objetivo inicial era demostrar que autómata = lógica.

- ¿Qué significa esto?

Queremos encontrar una lógica que defina a los lenguajes regulares.

- El primer paso es definir una representación de las palabras como estructuras ...

Palabras como estructuras

Dado: Alfabeto Σ

Vamos a representar las palabras sobre Σ como estructuras sobre el vocabulario:

$$\mathcal{L}_\Sigma \quad = \quad \{P_a(\cdot) \mid a \in \Sigma\} \cup \{<\}.$$

Una palabra $w \in \Sigma^*$ de largo $n \geq 1$ es representada como una estructura $\mathfrak{A}_w$ tal que:

- $A = \{1, \ldots, n\}$,
- $P_a^A = \{i \mid \text{el } i\text{-ésimo símbolo de } w \text{ es } a\}$,
- $<^A$ es el orden lineal usual sobre $\{1, \ldots, n\}$.

Nota: La palabra vacía ε es representada como la estructura con dominio vacío.

Palabras como estructuras: Ejemplos

Un par de ejemplos:

- Si $\Sigma = \{0, 1\}$ y $w = 01101$, entonces $\mathcal{L}_\Sigma = \{P_0(\cdot), P_1(\cdot), <\}$ y

$$\mathfrak{A}_w \quad = \quad \langle \{1, 2, 3, 4, 5\}, P_0^A = \{1, 4\}, P_1^A = \{2, 3, 5\}, <^A \rangle$$

- Si $\Sigma = \{a, b, c\}$ y $w = caaa$, entonces $\mathcal{L}_\Sigma = \{P_a(\cdot), P_b(\cdot), P_c(\cdot), <\}$ y

$$\mathfrak{A}_w \quad = \quad \langle \{1, 2, 3, 4\}, P_a^A = \{2, 3, 4\}, P_b^A = \emptyset, P_c^A = \{1\}, <^A \rangle$$

Lenguajes definidos por una lógica

Dado: Alfabeto Σ

Un lenguaje L sobre Σ puede ser definido por una máquina.

- L es un lenguaje regular si es aceptado por un autómata.

Pero un lenguaje L sobre Σ también puede ser definido por una lógica $\mathcal{LO}$.

- Dada una oración Φ en $\mathcal{LO}$, $L(\Phi) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathfrak{A}_w \models \Phi\}$.
- L es definible en $\mathcal{LO}$ si existe una oración Φ en $\mathcal{LO}$ tal que $L = L(\Phi)$.

Lenguajes definidos por una lógica: Ejercicios

Sea $\Sigma = \{0, 1\}$.

1. ¿Es el lenguaje 0^*1^* definible en LPO?

2. ¿Es el lenguaje $(00)^*$ definible en LPO?

3. ¿En qué lógica es definible el lenguaje $(000)^*$?

Autómata = Lógica: Demostración

Dado: Alfabeto Σ

Teorema (Büchi): Un lenguaje L sobre Σ es regular si y sólo si $L = L(\Phi)$ para alguna $\mathcal{L}_\Sigma$-oración en MSO.

¿Cómo se demuestra este teorema?

- Aquí usamos teoría de modelos finitos.

Autómata $=$ Lógica: Algunos corolarios

Corolario 1: Todo autómata es equivalente a un autómata determinista.

Corolario 2: El lenguaje $\{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ no es regular.

Corolario 3: MSO $=$ $\exists$MSO sobre las estructuras que representan palabras.