

Una Aplicación de Teoría de Modelos Finitos:

Lógica = Autómata

Lógica Monádica de Segundo Orden (MSO)

La lógica monádica de segundo orden (MSO) restringe a la LSO sólo permitiendo cuantificadores de segundo orden unarios.

- ¿Qué se puede decir en esta lógica?

En esta sección vamos a estudiar esta lógica por su conexión con la teoría de autómatas.

- Vamos a demostrar que **lógica = autómatas**.

Notación: Rango de cuantificación

El rango de cuantificación de una fórmula φ en MSO se define como:

- Si φ es atómica, entonces $rc(\varphi) = 0$.
- Si $\varphi = \neg\psi$, entonces $rc(\varphi) = rc(\psi)$.
- Si $\varphi = \psi \vee \theta$, entonces $rc(\varphi) = \max\{rc(\psi), rc(\theta)\}$.
- Si $\varphi = \exists x \psi$, donde x es un cuantificador de primer orden, entonces $rc(\varphi) = 1 + rc(\psi)$.
- Si $\varphi = \exists X \psi$, donde X es un cuantificador de segundo orden, entonces $rc(\varphi) = 1 + rc(\psi)$.

Notación: Vocabularios extendidos

Dado: $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$, tupla $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$ de puntos en A y tupla $\bar{A} = (A_1, \dots, A_n)$ de subconjuntos de A .

Notación: $(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{A})$ es una $\mathcal{L} \cup \{c_1, \dots, c_m, P_1(\cdot), \dots, P_n(\cdot)\}$ -estructura tal que:

- $c_i^A = a_i$ para todo $1 \leq i \leq m$, y
- $P_j^A = A_j$ para todo $1 \leq j \leq n$.

Juegos para MSO

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ que contiene constantes $\{c_1, \dots, c_\ell\}$

Elementos del juego:

Tablero : $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$

Jugadores : Duplicator (**D**) y Spoiler (**S**)

Número de rondas : $k \geq 0$ (parámetro del juego)

Juegos para MSO

En cada ronda, **S** decide si va a jugar un **punto** o un **conjunto**.

- Si **S** decide jugar un punto, entonces elige una estructura y juega un punto en esa estructura.

D responde con un punto en la otra estructura.

- Si **S** decide jugar un conjunto, entonces elige una estructura y juega un conjunto en esa estructura.

D responde con un conjunto en la otra estructura.

Juegos para MSO

Sean $(a_1, \dots, a_m)$, $(b_1, \dots, b_m)$ los puntos jugados en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, y $(A_1, \dots, A_n)$, $(B_1, \dots, B_n)$ los conjuntos jugados en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

- Se tiene que $k = m + n$.

S gana el juego si $((c_1^A, \dots, c_\ell^A, a_1, \dots, a_m), (c_1^B, \dots, c_\ell^B, b_1, \dots, b_m))$ no es un isomorfismo parcial de $(\mathfrak{A}, A_1, \dots, A_n)$ en $(\mathfrak{B}, B_1, \dots, B_n)$.

- En caso contrario gana **D**.

Juegos para MSO

D tiene una **estrategia ganadora** en el juego para MSO de k rondas entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, si para cada posible forma de jugar de **S**, existe una forma de jugar de **D** que le permite ganar.

Notación: $\mathfrak{A} \equiv_k^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$.

Juegos para MSO: Primer ejemplo

Sean $\mathfrak{A} = \langle \{1, 2, 3, 4\} \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle \{1, 2, 3, 4, 5\} \rangle$. ¿Es cierto que $\mathfrak{A} \equiv_4^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$?

Dado $k \geq 1$: ¿Existe algún n para el cual $\langle \{1, \dots, n\} \rangle \equiv_k^{\text{MSO}} \langle \{1, \dots, n, n+1\} \rangle$?

Juegos para MSO: Primer Ejemplo

Proposición: Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$ -estructuras tales que $|A|, |B| \geq 2^k$. Entonces $\mathfrak{A} \equiv_k^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$.

Demostración: Por inducción en k .

La demostración es trivial para el caso $k = 1$.

Suponga que la propiedad es cierta para $k \geq 1$, y que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $\mathcal{L}$ -estructuras tales que $|A|, |B| \geq 2^{k+1}$.

- Vamos a demostrar que $\mathfrak{A} \equiv_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$.

Juegos para MSO: Primer Ejemplo

Primero suponga que **S** decide jugar un punto a_1 en $\mathfrak{A}$.

- Entonces **D** responde con un punto arbitrario b_1 en $\mathfrak{B}$.
 - Se tiene que $|A \setminus \{a_1\}| \geq 2^k$ y $|B \setminus \{b_1\}| \geq 2^k$.

Entonces:

$$\begin{aligned} \langle \{a_1\} \rangle &\equiv_k^{\text{MSO}} \langle \{b_1\} \rangle \\ \langle A \setminus \{a_1\} \rangle &\equiv_k^{\text{MSO}} \langle B \setminus \{b_1\} \rangle \quad \text{por hipótesis de inducción} \end{aligned}$$

Por lo tanto: a partir de la movida (a_1, b_1) , **D** tiene una estrategia ganadora para las siguientes k movidas.

- **D** compone las estrategias señaladas arriba.

Juegos para MSO: Primer Ejemplo

Ahora suponga que **S** decide jugar un conjunto A_1 en $\mathfrak{A}$.

- Si $|A_1| \leq 2^k$, entonces **D** responde con un conjunto arbitrario B_1 en $\mathfrak{B}$ tal que $|A_1| = |B_1|$.
 - Se tiene que $|A \setminus A_1| \geq 2^k$ y $|B \setminus B_1| \geq 2^k$.

Entonces:

$$\begin{array}{lll} \langle A_1 \rangle & \equiv_k^{\text{MSO}} & \langle B_1 \rangle & \text{dado que } |A_1| = |B_1| \\ \langle A \setminus A_1 \rangle & \equiv_k^{\text{MSO}} & \langle B \setminus B_1 \rangle & \text{por hipótesis de inducción} \end{array}$$

Por lo tanto: a partir de la movida (A_1, B_1) , **D** tiene una estrategia ganadora para las siguientes k movidas.

- **D** compone las estrategias señaladas arriba.

Juegos para MSO: Primer Ejemplo

- Si $|A \setminus A_1| \leq 2^k$, entonces $\mathbf{D}$ responde con un conjunto arbitrario B_1 en $\mathfrak{B}$ tal que $|B \setminus B_1| = |A \setminus A_1|$.

Como en el caso anterior, se concluye que a partir de la movida (A_1, B_1) , $\mathbf{D}$ tiene una estrategia ganadora para las siguientes k movidas.

Juegos para MSO: Primer ejemplo

- Si $|A_1| > 2^k$ y $|A \setminus A_1| > 2^k$, entonces $\mathbf{D}$ responde con un conjunto arbitrario B_1 en $\mathfrak{B}$ tal que $|B_1| \geq 2^k$ y $|B \setminus B_1| \geq 2^k$.

Por hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned}\langle A_1 \rangle &\equiv_k^{\text{MSO}} \langle B_1 \rangle \\ \langle A \setminus A_1 \rangle &\equiv_k^{\text{MSO}} \langle B \setminus B_1 \rangle\end{aligned}$$

Por lo tanto: a partir de la movida (A_1, B_1) , $\mathbf{D}$ tiene una estrategia ganadora para las siguientes k movidas.

Juegos para MSO: Primer ejemplo

Si **S** decide jugar en $\mathfrak{B}$, **D** responde de manera análoga.

Por lo tanto: **D** tiene una forma de responder a **S** en la primera movida que le asegura una estrategia ganadora en las siguientes k movidas.

Concluimos que: $\mathfrak{A} \equiv_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$

□

Juegos para MSO: Segundo Ejemplo

Suponga que $\mathcal{L} = \{<\}$.

Proposición: Sean $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$ -estructuras tales que $<^A$, $<^B$ son ordenes lineales, $|A|$ tiene una cantidad par de elementos y $|B|$ tiene una cantidad impar de elementos. Entonces $\mathfrak{A} \not\equiv_5^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$.

Ejercicio: Demuestre la proposición.

Caracterización de MSO

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$.

Notación: $\text{MSO}[k]$ es el conjunto de $\mathcal{L}$ -oraciones en MSO con rango de cuantificación a lo más k .

Teorema: Para todo par de $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1) $\mathfrak{A} \equiv_k^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$.
- (2) $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $\text{MSO}[k]$.

Demostración de la caracterización: Tipo de una estructura

Dado: $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$, tupla $\bar{a}$ de puntos en A y tupla $\bar{A}$ de subconjuntos de A .

El MSO k -tipo de $(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{A})$ es definido como:

$$\begin{aligned} \text{mso-tp}_k(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{A}) &= \{ \varphi(\bar{x}, \bar{X}) \mid \\ &\quad \varphi(\bar{x}, \bar{X}) \text{ es una fórmula en MSO tal que} \\ &\quad \text{rc}(\varphi(\bar{x}, \bar{X})) \leq k \text{ y } \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}, \bar{A}) \} \end{aligned}$$

Demostración de la caracterización: Tipo de una estructura

Lema: Si $\mathcal{L}$ es finito, entonces $\text{mso-tp}_k(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{A})$ contiene un número finito de fórmulas hasta equivalencia lógica.

Demostración: Como en el caso de LPO, por inducción en k se puede demostrar que hasta equivalencia lógica hay un número finito de fórmulas $\varphi(\bar{x}, \bar{X})$ en MSO con $rc(\varphi(\bar{x}, \bar{X})) \leq k$. □

Como $\text{mso-tp}_k(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{A})$ es finito (hasta equivalencia lógica), existe una fórmula $\chi_{(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{A})}^k(\bar{x}, \bar{X})$ que lo representa.

- Para cada $(\mathfrak{B}, \bar{b}, \bar{B})$ se tiene que $\mathfrak{B} \models \chi_{(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{A})}^k(\bar{b}, \bar{B})$ si y sólo si $\text{mso-tp}_k(\mathfrak{B}, \bar{b}, \bar{B}) = \text{mso-tp}_k(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{A})$.

Demostración de la caracterización: Back & Forth

Para la demostración usamos tipos y la relación $\simeq_k^{\text{MSO}}$ definida de la siguiente forma:

- $\mathfrak{A} \simeq_0^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$ si $\mathfrak{A} \equiv_0^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$.

- $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$ si

forth : para cada $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b)$, y
para cada $X \subseteq A$, existe $Y \subseteq B$ tal que $(\mathfrak{A}, X) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, Y)$

back : para cada $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b)$, y
para cada $Y \subseteq B$, existe $X \subseteq A$ tal que $(\mathfrak{A}, X) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, Y)$

Caracterización de MSO: Versión extendida

Teorema: Para todo par de $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1) $\mathfrak{A} \equiv_k^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$.
- (2) $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $\text{MSO}[k]$.
- (3) $\mathfrak{A} \simeq_k^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$.

Demostración:

(1) $\Leftrightarrow$ (3): Por inducción en k . Para $k = 0$ se tiene por definición.

Demostración de la versión extendida

Supongamos que la propiedad se cumple para k .

- Suponga que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$. Tenemos que demostrar que $\mathfrak{A} \equiv_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$.

Si $\mathbf{S}$ juega $a_1 \in A$, existe $b_1 \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b_1)$ (ya que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$). Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, a_1) \equiv_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b_1)$.

- Para todo $a_1 \in A$, existe $b_1 \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a_1) \equiv_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b_1)$.

Si $\mathbf{S}$ juega $A_1 \subseteq A$, existe $B_1 \subseteq B$ tal que $(\mathfrak{A}, A_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, B_1)$ (ya que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$). Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, A_1) \equiv_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, B_1)$.

- Para todo $A_1 \subseteq A$, existe $B_1 \subseteq B$ tal que $(\mathfrak{A}, A_1) \equiv_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, B_1)$.

Combinando esto con los resultados obtenidos usando back,

concluimos que $\mathfrak{A} \equiv_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$.

Demostración de la versión extendida

- Suponga que $\mathfrak{A} \equiv_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$. Tenemos que demostrar que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$.

Sea $a_1 \in A$ y suponga que **S** juega a_1 . Como $\mathfrak{A} \equiv_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$, existe $b_1 \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a_1) \equiv_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b_1)$. Por hipótesis de inducción:
 $(\mathfrak{A}, a_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b_1)$.

- Para todo $a_1 \in A$, existe $b_1 \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b_1)$.

Sea $A_1 \subseteq A$ y suponga que **S** juega A_1 . Como $\mathfrak{A} \equiv_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$, existe $B_1 \subseteq B$ tal que $(\mathfrak{A}, A_1) \equiv_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, B_1)$. Por hipótesis de inducción:
 $(\mathfrak{A}, A_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, B_1)$.

- Para todo $A_1 \subseteq A$, existe $B_1 \subseteq B$ tal que $(\mathfrak{A}, A_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, B_1)$.

Combinando esto con los resultados obtenidos al hacer jugar a **S** en $\mathfrak{B}$, concluimos que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$.

Demostración de la versión extendida

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Por inducción en k .

Para $k = 0$ se tiene la equivalencia.

Supongamos que la equivalencia se tiene para k .

- Suponga que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$. Tenemos que demostrar que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $\text{MSO}[k+1]$. Para hacer esto nos basta con considerar los casos $\exists x \varphi(x)$ y $\exists X \psi(X)$.

- Si $\mathfrak{A} \models \exists x \varphi(x)$, entonces existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$.

Como $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$, existe $b \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b)$.

Demostración de la versión extendida

Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, a)$ y $(\mathfrak{B}, b)$ están de acuerdo en $\text{MSO}[k]$.

Sea $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$. Como $(\mathfrak{A}, a) \models \varphi(c)$, $rc(\varphi(c)) = k$ y $(\mathfrak{A}, a)$, $(\mathfrak{B}, b)$ están de acuerdo en $\text{MSO}[k]$, se tiene que $(\mathfrak{B}, b) \models \varphi(c)$.

Tenemos entonces que $\mathfrak{B} \models \varphi(b)$, por lo que concluimos que $\mathfrak{B} \models \exists x \varphi(x)$.

De la misma forma concluimos que si $\mathfrak{B} \models \exists x \varphi(x)$, entonces $\mathfrak{A} \models \exists x \varphi(x)$.

Demostración de la versión extendida

- Si $\mathfrak{A} \models \exists X \psi(X)$, entonces existe $A_1 \subseteq A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi(A_1)$.

Como $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$, existe $B_1 \subseteq B$ tal que $(\mathfrak{A}, A_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, B_1)$.

Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, A_1)$ y $(\mathfrak{B}, B_1)$ están de acuerdo en $\text{MSO}[k]$.

Sea $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{P(\cdot)\}$. Como $(\mathfrak{A}, A_1) \models \psi(P)$, $rc(\psi(P)) = k$ y $(\mathfrak{A}, A_1), (\mathfrak{B}, B_1)$ están de acuerdo en $\text{MSO}[k]$, se tiene que $(\mathfrak{B}, B_1) \models \psi(P)$.

Tenemos entonces que $\mathfrak{B} \models \psi(B_1)$, por lo que concluimos que $\mathfrak{B} \models \exists X \psi(X)$.

De la misma forma concluimos que si $\mathfrak{B} \models \exists X \psi(X)$, entonces $\mathfrak{A} \models \exists X \psi(X)$.

Demostración de la versión extendida

- Suponga que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $\text{MSO}[k + 1]$. Tenemos que demostrar que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$.

Sea $a_1 \in A$. Como $\mathfrak{A} \models \chi_{(\mathfrak{A}, a_1)}^k(a_1)$, sabemos que $\mathfrak{A} \models \exists x \chi_{(\mathfrak{A}, a_1)}^k(x)$. Puesto que $rc(\exists x \chi_{(\mathfrak{A}, a_1)}^k(x)) = k + 1$, se tiene que $\mathfrak{B} \models \exists x \chi_{(\mathfrak{A}, a_1)}^k(x)$. Entonces, existe $b_1 \in B$ tal que $\mathfrak{B} \models \chi_{(\mathfrak{A}, a_1)}^k(b_1)$.

Por lo tanto: $\text{mso-tp}_k(\mathfrak{A}, a_1) = \text{mso-tp}_k(\mathfrak{B}, b_1)$, lo cual significa que $(\mathfrak{A}, a_1)$ y $(\mathfrak{B}, b_1)$ están de acuerdo en $\text{MSO}[k]$. Así, por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, a_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b_1)$.

Entonces: Para todo $a_1 \in A$, existe $b_1 \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b_1)$.

De la misma forma concluimos que para todo $b_1 \in B$, existe $a_1 \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, a_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b_1)$.

Demostración de la versión extendida

Sea $A_1 \subseteq A$. Como $\mathfrak{A} \models \chi_{(\mathfrak{A}, A_1)}^k(A_1)$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \exists X \chi_{(\mathfrak{A}, A_1)}^k(X)$. Entonces $\mathfrak{B} \models \exists X \chi_{(\mathfrak{A}, A_1)}^k(X)$ ya que $rc(\exists X \chi_{(\mathfrak{A}, A_1)}^k(X)) = k + 1$.

Por lo tanto: Existe $B_1 \subseteq B$ tal que $\mathfrak{B} \models \chi_{(\mathfrak{A}, A_1)}^k(B_1)$.

Concluimos que $\text{mso-tp}_k(\mathfrak{A}, A_1) = \text{mso-tp}_k(\mathfrak{B}, B_1)$, lo cual significa que $(\mathfrak{A}, A_1)$ y $(\mathfrak{B}, B_1)$ están de acuerdo en $\text{MSO}[k]$. Así, por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, A_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, B_1)$.

Entonces: Para todo $A_1 \subseteq A$, existe $B_1 \subseteq B$ tal que $(\mathfrak{A}, A_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, B_1)$.

De la misma forma concluimos que para todo $B_1 \subseteq B$, existe $A_1 \subseteq A$ tal que $(\mathfrak{A}, A_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, B_1)$.

- Tenemos que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$. □

Caracterización de MSO: Dos corolarios

Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y $\text{PARIDAD} = \{\mathfrak{A} \in \text{struct}[\mathcal{L}] \mid \text{dominio de } \mathfrak{A} \text{ tiene un número par de elementos}\}$.

Corolario 1: PARIDAD no es expresable en MSO.

Corolario 2: MSO es menos expresiva que LSO.