Poder expresivo de una lógica sobre una clase de estructuras

Dado: Clase $\mathcal{C}$ de $\mathcal{L}$-estructuras.

- Ejemplo: $\mathcal{C}$ es el conjunto de ordenes lineales.

$\mathcal{P}$ es una propiedad sobre $\mathcal{C}$ si $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$.

Decimos que $\mathcal{P}$ es expresable en lógica de primer orden en $\mathcal{C}$ si existe una oración φ tal que para toda $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \qquad \text{si y sólo si} \qquad \mathfrak{A} \in \mathcal{P}.$$

¿Se puede usar la metodología para demostrar que una propiedad no es expresable en $\mathcal{C}$? ¿Cómo?

Ejemplo: Ordenes lineales

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$ y $\mathcal{C}$ la clase de ordenes lineales sobre $\mathcal{L}$. Queremos demostrar que la siguiente propiedad no es expresable:

$$\mathcal{P} \quad = \quad \{\mathfrak{A} \in \mathcal{C} \mid |A| \text{ es par, donde } A \text{ es el dominio de } \mathfrak{A}\}.$$

Suponemos que $\mathcal{P}$ es expresable en $\mathcal{C}$. Entonces existe φ tal que para todo orden lineal $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \qquad \text{si y sólo si} \qquad \mathfrak{A} \text{ tiene un número par de elementos.}$$

Suponemos que $rc(\varphi) = k$.

Ejemplo: Ordenes lineales

Tenemos que encontrar estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tales que $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos y $\mathfrak{B}$ tiene un número impar de elementos.

¿Cuan grandes tienen que ser los dominios de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$?

- Con una fórmula con rango de cuantificación k, ¿De qué tamaño son la estructuras que podemos distinguir?

Lógica de primer orden y ordenes lineales

Definimos una familia de fórmulas $\alpha_n(x,y)$ $(n \geq 1)$ de manera recursiva:

$$\begin{aligned} \alpha_1(x,y) &:= x < y, \\ \alpha_n(x,y) &:= \exists x_n \, (\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(x, x_n) \wedge \alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(x_n, y)). \end{aligned}$$

Veamos cuáles son las propiedades fundamentales de estas fórmulas.

Propiedad I: $rc(\alpha_n(x,y)) = \lceil \log n \rceil$.

Demostración: Por inducción en n. Para $n = 1$ se cumple trivialmente.

Lógica de primer orden y ordenes lineales

Supongamos que $n \geq 2$ y que la propiedad se cumple para todo número menor que n.

Por definición: $rc(\alpha_n(x,y)) = 1 + \max\{rc(\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(x, x_n)),\ rc(\alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(x_n, y))\}$.

Por hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} rc(\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(x,y)) &= \lceil \log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rceil, \\ rc(\alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(x,y)) &= \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil. \end{aligned}$$

Como $\log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \log \lceil \frac{n}{2} \rceil$, concluimos que:

$$rc(\alpha_n(x,y)) = 1 + \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil.$$

Por demostrar: $\lceil \log n \rceil = 1 + \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil$.

Un poco de aritmética ...

Consideramos tres casos:

1. Suponemos que $n = 2^\ell$, donde $\ell \geq 1$.

   Entonces $\lceil \frac{n}{2} \rceil = 2^{\ell-1}$, por lo que:

   $$\lceil \log n \rceil = \ell = 1 + (\ell - 1) = 1 + \lceil \log 2^{\ell-1} \rceil = 1 + \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil.$$

2. Suponemos que $n = 2^\ell + 2c$, donde $\ell \geq 1$ y $0 < 2c < 2^\ell$.

   Como $2^\ell < 2^\ell + 2c < 2^{\ell+1}$, concluimos que $\lceil \log n \rceil = \ell + 1$.

   Como $0 < 2c < 2^\ell$, se tiene que $0 < c < 2^{\ell-1}$. Concluimos que $2^{\ell-1} < 2^{\ell-1} + c < 2^\ell$, y por lo tanto $\lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil = \ell$, puesto que $\lceil \frac{n}{2} \rceil = 2^{\ell-1} + c$.

   De todo lo anterior: $\lceil \log n \rceil = 1 + \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil$.

Un poco de aritmética ...

3. Suponemos que $n = 2^\ell + 2c + 1$, donde $\ell \geq 1$ y $1 \leq 2c+1 < 2^\ell$.

   Como $2^\ell < 2^\ell + 2c + 1 < 2^{\ell+1}$, concluimos que $\lceil \log n \rceil = \ell + 1.$

   Como $1 \leq 2c+1 < 2^\ell$, se tiene que $\frac{1}{2} \leq c + \frac{1}{2} < 2^{\ell-1}$. Entonces tenemos que $1 \leq c+1 \leq 2^{\ell-1}$. Concluimos que $2^{\ell-1} < 2^{\ell-1} + c + 1$ $\leq 2^\ell$, y por lo tanto $\lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil = \ell,$ puesto que $\lceil \frac{n}{2} \rceil = 2^{\ell-1} + c + 1$.

   De todo lo anterior: $\lceil \log n \rceil = 1 + \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil.$

$\square$

Propiedad II: Sea $\mathfrak{A} = \langle A = \{1, \ldots, m\}, <^A \rangle$. Si $\mathfrak{A} \models \alpha_n(i, j)$, entonces $j - i \geq n$.

Demostración: Por inducción en n. Para $n = 1$ es fácil de verificar.

Sea $n \geq 2$ y supongamos que la propiedad se cumple para todo número menor que n.

Si $\mathfrak{A} \models \alpha_n(i, j)$, entonces existe k tal que $\mathfrak{A} \models \alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(i, k)$ y $\mathfrak{A} \models \alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(k, j)$.

Por hipótesis de inducción:

$$k - i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \quad \text{y} \quad j - k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

Como $j - i = (j - k) + (k - i)$, concluimos que $j - i \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = n$.

$\square$

Juegos y ordenes lineales

Primer corolario: Si un orden lineal $\mathfrak{A}$ satisface $\alpha_{2^k}(a, b)$, entonces la distancia entre a y b es al menos 2^k.

- Con una fórmula con rango de cuantificación k podemos verificar si dos puntos están a distancia 2^k.
- $\mathfrak{A}$ tiene al menos $2^k + 1$ elementos.

Tenemos una primera indicación de que si queremos $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ deben tener un número exponencial de elementos.

Hagamos esta afirmación más precisa ...

Juegos y ordenes lineales

Dado: $\mathfrak{A} = \langle A = \{1, \ldots, m\}, <^A \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle B = \{1, \ldots, n\}, <^B \rangle$.

Pregunta original: ¿Cuan grandes tienen que ser m y n para que $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$?

Proposición: Si $m < n < 2^{k-1}$, entonces existe una oración φ tal que $\mathfrak{A} \not\models \varphi$, $\mathfrak{B} \models \varphi$ y $rc(\varphi) \leq k$.

Demostración: Sea

$$\varphi = \exists x \, (\exists y \, \alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(y, x) \ \wedge \ \exists z \, \alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}(x, z)).$$

Se tiene que $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ y $\mathfrak{B} \models \varphi$. ¿Por qué?

También se tiene que $rc(\varphi) = 2 + rc(\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(y, x)) = 2 + \lceil \log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rceil$.

Como $n < 2^{k-1}$, se tiene que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < 2^{k-2}$, por lo que $\lceil \log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rceil \leq k - 2$. Concluimos que $rc(\varphi) \leq k$. $\square$

Conclusión: Si queremos que $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, entonces $|A|$ y $|B|$ deben ser $O(2^k)$.

Vamos a ver que esta es una buena estimación ...

Ordenes lineales indistinguibles

Dado: $\mathfrak{A} = \langle A = \{1, \ldots, m\}, <^A \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle B = \{1, \ldots, n\}, <^B \rangle$.

Proposición: Si $m, n \geq 2^k + 1$, entonces $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$.

Demostración: Tenemos que definir la estrategia ganadora para **D**.

Vamos a utilizar una estrategia que en la ronda $\ell \leq k$ cumpla lo siguiente: Si las movidas en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $(a_1, \ldots, a_\ell)$ y $(b_1, \ldots, b_\ell)$, respectivamente, entonces para todo $1 \leq i, j \leq \ell$:

(1a) si $|a_i - a_j| < 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - b_j| = |a_i - a_j|$;

(1b) si $|a_i - 1| < 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - 1| = |a_i - 1|$;

(1c) si $|a_i - m| < 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - n| = |a_i - m|$;

Ordenes lineales indistinguibles

(2a) si $|a_i - a_j| \geq 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - b_j| \geq 2^{k-\ell}$;

(2b) si $|a_i - 1| \geq 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - 1| \geq 2^{k-\ell}$;

(2c) si $|a_i - m| \geq 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - n| \geq 2^{k-\ell}$;

(3) $a_i < a_j$ si y sólo si $b_i < b_j$.

Cuando tomamos $\ell = k$, concluimos que gana **D**. ¿Por qué?

Vamos a demostrar por inducción en $\ell \leq k$ que **D** puede jugar de tal forma de cumplir las condiciones anteriores.

Ordenes lineales indistinguibles

Suponga que en la ronda $\ell < k$ las movidas en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $(a_1, \ldots, a_\ell)$ y $(b_1, \ldots, b_\ell)$, respectivamente.

Suponga que **S** decide jugar un punto $a_{\ell+1}$ en $\mathfrak{A}$ (si hubiera decidido jugar un punto en $\mathfrak{B}$, la estrategia se definiría de la misma forma).

Tenemos tres casos posibles:

- Existe $1 \leq i \leq \ell$ tal que a_i es el menor elemento en $(a_1, \ldots, a_\ell)$ y $1 \leq a_{\ell+1} \leq a_i$.
- Existe $1 \leq i \leq \ell$ tal que a_i es el mayor elemento en $(a_1, \ldots, a_\ell)$ y $a_i \leq a_{\ell+1} \leq m$.
- Existen $1 \leq i, j \leq \ell$ tales que $a_i \leq a_j$, no existe un elemento entre ellos en $(a_1, \ldots, a_\ell)$ y $a_i \leq a_{\ell+1} \leq a_j$.

Ordenes lineales indistinguibles

Vamos a ver como se define la estrategia en el tercer caso. Los otros dos casos son idénticos a este.

- Si $|a_i - a_j| < 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - b_j| = |a_i - b_j|$. Los intervalos $[a_i, a_j]$ en $\mathfrak{A}$ y $[b_i, b_j]$ en $\mathfrak{B}$ son isomorfos, por lo que es fácil definir $b_{\ell+1}$. ¿Cómo se define?

- Si $|a_i - a_j| \geq 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - b_j| \geq 2^{k-\ell}$. Para definir $b_{\ell+1}$ consideramos tres casos.

  Si $|a_i - a_{\ell+1}| < 2^{k-(\ell+1)}$, entonces definimos $b_{\ell+1}$ como un punto en $\mathfrak{B}$ mayor o igual a b_i tal que $|a_i - a_{\ell+1}| = |b_i - b_{\ell+1}|$.

  Si $|a_j - a_{\ell+1}| < 2^{k-(\ell+1)}$, entonces definimos $b_{\ell+1}$ como un punto en $\mathfrak{B}$ menor o igual a b_j tal que $|a_j - a_{\ell+1}| = |b_j - b_{\ell+1}|$.

Ordenes lineales indistinguibles

Si $|a_i - a_{\ell+1}| \geq 2^{k-(\ell+1)}$ y $|a_j - a_{\ell+1}| \geq 2^{k-(\ell+1)}$, entonces definimos $b_{\ell+1}$ de la siguiente forma.

Sabemos que existe por lo menos un punto $b_i \leq b \leq b_j$ tal que $|b_i - b| \geq 2^{k-(\ell+1)}$ y $|b_j - b| \geq 2^{k-(\ell+1)}$. Definimos $b_{\ell+1}$ como uno de estos puntos.

Para terminar la demostración debemos probar que $(a_1, \ldots, a_{\ell+1})$ y $(b_1, \ldots, b_{\ell+1})$ satisfacen las condiciones iniciales. ¿Es cierto esto?

$\square$

Paridad no es definible sobre ordenes lineales

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$, $\mathcal{C}$ la clase de ordenes lineales sobre $\mathcal{L}$ y

$$\mathcal{P} \quad = \quad \{\mathfrak{A} \in \mathcal{C} \mid |A| \text{ es par, donde } A \text{ es el dominio de } \mathfrak{A}\}.$$

Corolario: $\mathcal{P}$ no es definible en lógica de primer orden en $\mathcal{C}$.

Ejercicio: Demuestre el corolario.

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé: Caso general

Volvemos a considerar vocabularios con constantes.

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

Decimos que $\mathfrak{B}$ es la sub-estructura de $\mathfrak{A}$ inducida por B si

- $B \subseteq A$,
- para cada $c \in \mathcal{L}$, se tiene que $c^A \in B$ y $c^B = c^A$,
- para cada $R \in \mathcal{L}$ de aridad k: $R^B = R^A \cap B^k$.

Notación: Isomorfismo incluyendo constantes

Dado: $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ y una función $f : A \to B$.

Decimos que f es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ si:

- f es una biyección.
- Para cada $c \in \mathcal{L}$, se tiene que $f(c^A) = c^B$.
- Para cada $R \in \mathcal{L}$ de aridad k y $\bar{a} \in A^k$, se tiene que $\bar{a} \in R^A$ si y sólo si $f(\bar{a}) \in R^B$.

Notación: $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son estructuras isomorfas, denotado como $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, si existe un isomorfismo f de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé: Caso general

Tablero	:	$\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$
Jugadores	:	Duplicator (**D**) y Spoiler (**S**)
Número de rondas	:	$k \geq 0$ (parámetro del juego)

En cada ronda:

1. **S** elije una estructura y un punto en esa estructura.

2. **D** responde con un punto en la otra estructura.

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé: Caso general

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ que contiene constantes $\{c_1, \ldots, c_\ell\}$.

Sean $(a_1, \ldots, a_k)$ y $(b_1, \ldots, b_k)$ los puntos jugados en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$. Entonces **S** gana el juego si $((c_1^A, \ldots, c_\ell^A, a_1, \ldots, a_k), (c_1^B, \ldots, c_\ell^B, b_1, \ldots, b_k))$ no es un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

- En caso contrario gana **D**.

¿Por qué incluimos las constantes?

- Nótese que puede pasar que $\mathfrak{A} \not\equiv_0 \mathfrak{B}$. ¿Tiene sentido esto?

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé: Estrategia ganadora

Decimos que **D** tiene una estrategia ganadora en el juego de Ehrenfeucht-Fraïssé de k rondas entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ si para cada posible forma de jugar de **S**, existe una forma de jugar de **D** que le permite ganar.

Notación: $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$.

Ejercicio: Sea $\mathcal{L} = \{<, min, max\}$ y $\mathcal{C}$ la clase de $\mathcal{L}$-estructuras tales que $<$ es un orden lineal, min es el menor elemento de $<$ y max es el mayor elemento de $<$.

Demuestre que para $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{C}$, si $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$ y $|A| \neq |B|$, entonces $|A|, |B| \geq 2^k + 1$.

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$.

Notación: LPO$[k]$ es el conjunto de $\mathcal{L}$-oraciones en lógica de primer orden con rango de cuantificación a lo más k.

Teorema (Ehrenfeucht-Fraïssé): Para todo par de $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$.

(2) $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en LPO$[k]$.

Ejercicio: Use este resultado para demostrar que la clausura transitiva no es definible en lógica de primer orden sobre la relación sucesor.

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé: Demostración

Dado: $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y tupla $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ en A^m.

Notación:

- $\mathcal{L}_m$: Resultado de extender $\mathcal{L}$ con m constantes nuevas c_1, ..., c_m.
- $(\mathfrak{A}, \bar{a})$: $\mathcal{L}_m$-estructura tal que $c_i^A = a_i$, para todo $1 \leq i \leq m$.

Dadas variables $x_1, \ldots, x_m$, el k-tipo de $(\mathfrak{A}, \bar{a})$ es definido como:

$\text{tp}_k(\mathfrak{A}, \bar{a}) = \{\varphi(x_1, \ldots, x_m) \mid rc(\varphi(x_1, \ldots, x_m)) \leq k \text{ y } \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_m)\}$.

Tipo de una estructura

Lema: Si $\mathcal{L}$ es finito, entonces $\mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}, \bar{a})$ contiene un número finito de fórmulas hasta equivalencia lógica.

Demostración: Por inducción en k y m, podemos demostrar que hay un número finito de fórmulas $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ con $rc(\varphi(x_1, \ldots, x_m)) \leq k$ hasta equivalencia lógica. ¿Cómo se demuestra esto?

$\square$

Como $\mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}, \bar{a})$ es finito (hasta equivalencia lógica), existe una fórmula $\varphi^k_{(\mathfrak{A}, \bar{a})}(x_1, \ldots, x_m)$ que lo representa.

- Para cada $(\mathfrak{B}, \bar{b})$ se tiene que $\mathfrak{B} \models \varphi^k_{(\mathfrak{A}, \bar{a})}(\bar{b})$ si y sólo si $\mathrm{tp}_k(\mathfrak{B}, \bar{b}) = \mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}, \bar{a})$.

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé: Demostración

Para demostrar el Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé usamos tipos y la relación $\simeq_k$ definida de la siguiente forma:

- $\mathfrak{A} \simeq_0 \mathfrak{B}$ si $\mathfrak{A} \equiv_0 \mathfrak{B}$.
- $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$ si

  forth : Para cada $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$

  back : Para cada $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé: Versión extendida

Teorema (Ehrenfeucht-Fraïssé): Para todo par de $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$.

(2) $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en LPO$[k]$.

(3) $\mathfrak{A} \simeq_k \mathfrak{B}$.

Demostración:

(1) $\Leftrightarrow$ (3): Por inducción en k. Para $k = 0$ se tiene por definición.

Demostración de la versión extendida

Supongamos que la propiedad se cumple para k.

- Suponga que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$. Tenemos que demostrar que $\mathfrak{A} \equiv_{k+1} \mathfrak{B}$.

  Suponga que **S** decide jugar a_1 en $\mathfrak{A}$. Entonces como $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$, existe b_1 en $\mathfrak{B}$ tal que $(\mathfrak{A}, a_1) \simeq_k (\mathfrak{B}, b_1)$. Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, a_1) \equiv_k (\mathfrak{B}, b_1)$.

  Por lo tanto: Para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \equiv_k (\mathfrak{B}, b)$.

  De la misma forma, pero ahora usando back, concluimos que para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \equiv_k (\mathfrak{B}, b)$.

  De lo anterior: $\mathfrak{A} \equiv_{k+1} \mathfrak{B}$.

Demostración de la versión extendida

- Suponga que $\mathfrak{A} \equiv_{k+1} \mathfrak{B}$. Tenemos que demostrar que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$.

  Sea $a \in A$ y suponga que **S** decide jugar este punto. Como **D** tiene una estrategia ganadora en el juego de $k+1$ rondas entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, existe b en $\mathfrak{B}$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \equiv_k (\mathfrak{B}, b)$. Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

  Por lo tanto: Para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

  De la misma forma, pero ahora dejando jugar a **S** en $\mathfrak{B}$, concluimos que para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

  De lo anterior: $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$.

Demostración de la versión extendida

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Por inducción en k.

Para $k = 0$ se tiene la equivalencia. ¿Por qué?

Supongamos que la equivalencia se tiene para k.

- Suponga que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$. Tenemos que demostrar que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en LPO[$k+1$]. Para hacer esto nos basta con considerar el caso $\varphi = \exists x\, \psi(x)$. ¿Por qué?

  Si $\mathfrak{A} \models \exists x\, \psi(x)$, entonces existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi(a)$.

  Como $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$, existe $b \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

Demostración de la versión extendida

Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, a)$ y $(\mathfrak{B}, b)$ están de acuerdo en LPO[k].

Sea $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$. Como $(\mathfrak{A}, a) \models \psi(c)$, $rc(\psi(c)) = k$ y $(\mathfrak{A}, a)$, $(\mathfrak{B}, b)$ están de acuerdo en LPO[k], se tiene que $(\mathfrak{B}, b) \models \psi(c)$.

Tenemos entonces que $\mathfrak{B} \models \psi(b)$, por lo que concluimos que $\mathfrak{B} \models \exists x\, \psi(x)$.

De la misma forma concluimos que si $\mathfrak{B} \models \exists x\, \psi(x)$, entonces $\mathfrak{A} \models \exists x\, \psi(x)$.

Demostración de la versión extendida

- Suponga que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en LPO$[k+1]$. Tenemos que demostrar que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$.

  Sea $a \in A$. Como $\mathfrak{A} \models \varphi^k_{(\mathfrak{A},a)}(a)$, sabemos que $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi^k_{(\mathfrak{A},a)}(x)$. Puesto que $rc(\exists x\, \varphi^k_{(\mathfrak{A},a)}(x)) = k+1$, se tiene que $\mathfrak{B} \models \exists x\, \varphi^k_{(\mathfrak{A},a)}(x)$. Entonces, existe $b \in B$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi^k_{(\mathfrak{A},a)}(b)$.

  Por lo tanto: $\mathrm{tp}_k(\mathfrak{A}, a) = \mathrm{tp}_k(\mathfrak{B}, b)$, lo cual significa que $(\mathfrak{A}, a)$ y $(\mathfrak{B}, b)$ están de acuerdo en LPO$[k]$. Así, por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

  Entonces: Para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

  De la misma forma concluimos que para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

  De lo anterior: $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$.