Teorías de Primer Orden

Una teoría $\mathcal{T}$ es un conjunto de oraciones tal que

$$\mathcal{T} \models \phi \quad \Rightarrow \quad \phi \in \mathcal{T}.$$

Observación: Un conjunto de oraciones Σ es una teoría si y sólo si $\Sigma = \{\psi \mid \Sigma \models \psi\}$.

Ejemplo: Las siguientes son teorías.

- El conjunto de todas las oraciones.
- El conjunto de las oraciones válidas.

Teorías de Primer Orden

Para una clase de estructuras $\mathfrak{K}$, el conjunto $\{\phi \mid \forall \mathfrak{A} \in \mathfrak{K}, \mathfrak{A} \models \phi\}$ es una teoría. Denotamos esta teoría como $\mathcal{T}(\mathfrak{K})$.

Podemos interesarnos, por ejemplo, en la teoría de los ordenes lineales, o en la teoría de los grafos bipartitos, etc.

Desde otro punto de vista: Para un conjunto de oraciones Σ, definimos $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ como $\{\mathfrak{A} \mid \forall \phi \in \Sigma, \mathfrak{A} \models \phi\}$. Entonces,

$$\mathcal{T}(\mathrm{Mod}(\Sigma)) = \{\psi \mid \Sigma \models \psi\}.$$

En ese caso escribimos $\mathcal{T}(\Sigma)$ por $\{\psi \mid \Sigma \models \psi\}$.

Teorías de Primer Orden

Ejercicio: Demuestre que si $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}_2$ entonces $\mathcal{T}(\mathfrak{K}_2) \subseteq \mathcal{T}(\mathfrak{K}_1)$.

Ejercicio: Demuestre que $\mathfrak{K} \subseteq \mathrm{Mod}(\mathcal{T}(\mathfrak{K}))$.

Ejercicio: Demuestre que $\mathcal{T}(\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2) = \mathcal{T}(\mathfrak{K}_1) \cap \mathcal{T}(\mathfrak{K}_2)$.

Ejercicio: Demuestre que $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \mathrm{Mod}(\mathcal{T}(\Sigma))$.

Teorías completas

Una teoría $\mathcal{T}$ es completa si para toda oración ϕ se tiene que $\phi \in \mathcal{T}$ o $\neg\phi \in \mathcal{T}$.

Ejemplo: Sea $\mathfrak{A}$ una estructura. Entonces $\mathcal{T}(\mathfrak{A})$ es una teoría completa.

Observación: Decimos que dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son elementalmente equivalentes si satisfacen exactamente las mismas oraciones. Entonces,

- Para una clase de estructuras $\mathcal{K}$ se tiene que $\mathcal{T}(\mathcal{K})$ es completa si y sólo si todas las estructuras en $\mathcal{K}$ son elementalmente equivalentes.
- Una teoría $\mathcal{T}$ es completa si y sólo si cualquiera dos estructuras en $\mathrm{Mod}(\mathcal{T})$ son elementalmente equivalentes.

Teorías completas

Ejemplo: Sea Σ el siguiente conjunto de oraciones:

$$\forall x\, \neg R(x,x)$$

$$\forall x \forall y\, (R(x,y) \, \wedge \, R(y,x) \, \rightarrow \, y = x)$$

$$\forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \, \wedge \, R(y,z) \, \rightarrow \, R(x,z))$$

$$\forall x \forall y\, (R(x,y) \, \vee \, R(y,x) \, \vee \, y = x)$$

La teoría de Σ no es completa.

En cambio, la teoría de $\Sigma \cup \{\exists x \exists y\, (\neg(x = y) \, \wedge \, \forall z\, (z = y \vee z = x))\}$ sí es completa.

Ejercicio: Sean T y T' dos teorías tal que $T \subseteq T'$. Asuma que T es completa y T' es satisfacible. Demuestre que $T = T'$.

Teorías axiomatizables y decidibles

Una teoría $\mathcal{T}$ es axiomatizable si existe Σ decidible tal que $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\Sigma)$. Si Σ es finito decimos que $\mathcal{T}$ es finitamente axiomatizable.

Ejemplo: La teoría de grupos es finitamente axiomatizable. La teoría de las estructuras infinitas es axiomatizable, pero no finitamente axiomatizable. La teoría de las estructuras finitas no es axiomatizable.

Un problema fundamental en lógica es saber si una teoría $\mathcal{T}$ es decidible. Es decir, si existe un algoritmo que decida si una formula ϕ pertenece o no a $\mathcal{T}$.

Teorías axiomatizables y decidibles

Algunos famosos resultados de indecibilidad:

Teorema: (Gödel, 1931) $\mathcal{T}((\mathbb{N}, 0, 1, \cdot, +))$ es indecidible.

Teorema: (Tarski) La teoría de grupos es indecidible.

Se puede demostrar que todas las nociones vistas anteriormente están relacionadas:

Teorema: Toda teoría completa y axiomatizable es decidible.

Por tanto, la teoría de los números naturales no es axiomatizable.

La teoría de $(\mathbb{N}, 0, S)$

Demostraremos que la teoría de $\mathcal{N}_S = (\mathbb{N}, 0, S)$ es decidible.

Para esto será suficiente demostrar que esta teoría admite eliminación de cuantificadores, es decir, que para toda fórmula ϕ se puede construir ψ sin cuantificadores tal que

$$\mathcal{T}(\mathcal{N}_S) \models \phi \leftrightarrow \psi.$$

Pregunta: ¿Por qué esto es suficiente?

La teoría de $(\mathbb{N}, 0, S)$

Lo siguiente se puede demostrar usando inducción, y el hecho de que cada fórmula θ sin cuantificadores es equivalente a una fórmula $\bigvee_i \bigwedge_j \alpha_{i,j}$, donde cada $\alpha_{i,j}$ es una fórmula atómica o su negación.

Proposición: Una teoría admite eliminación de cuantificadores si toda fórmula $\exists x\,(\alpha_0 \wedge \ldots \wedge \alpha_m)$, donde cada α_i es una fórmula atómica o su negación, es equivalente a una fórmula sin cuantificadores.

Usaremos esta proposición para demostrar que $\mathcal{T}(\mathcal{N}_S)$ admite eliminación de cuantificadores.

La teoría de $(\mathbb{N}, 0, S)$

Sea $\exists x\, (\alpha_0 \wedge \ldots \wedge \alpha_m)$ una de estas fórmulas.

Los términos en nuestro vocabulario son todos de la forma $S^n(u)$, donde u es 0 o una variable. Además, cada fórmula atómica es una igualdad entre dos de estos términos.

Podemos asumir que cada una de nuestras fórmulas α_i es de la forma $S^n(x) = S^m(u)$ (o su negación), donde u es 0 o una variable y diferente de x (¿Por qué?).

Podemos asumir además que no todos los α_i son negaciones de igualdades. De otra forma la fórmula se puede reemplazar por $0 = 0$ (¿Por qué?).

La teoría de $(\mathbb{N}, 0, S)$

Asuma que α_i no aparece negada, para $i \leq n$. Entonces α_i es de la forma $S^n(x) = t$, para algún término t que no menciona a x.

Reemplazamos entonces α_i con la conjunción

$$\neg(t = 0) \wedge \ldots \wedge \neg(t = S^{n-1}(0)).$$

Reemplazamos además cada α_j, $j \neq i$, de la forma $S^m(x) = t'$ (o su negación) donde t' no menciona a x, con la fórmula $S^m(t) = S^n(t')$.

La nueva fórmula no menciona a x, por tanto el cuantificador puede ser eliminado, y es además equivalente a la fórmula original (¿Por qué?).

Una axiomatización para $(\mathbb{N}, 0, S)$

Demostraremos ahora que $\mathcal{T}(\mathcal{N}_S) = \mathcal{T}(\Sigma_S)$ para un conjunto decidible de oraciones Σ_S. Esto nos dará otra demostración de su decibilidad.

Nuestro candidato para Σ_S:

$$\forall x\, \neg(S(x) = 0)$$

$$\forall x \forall y\, (S(x) = S(y) \rightarrow y = x)$$

$$\forall x (\neg(x = 0) \rightarrow \exists y (S(y) = x))$$

$$\forall x\, \neg(S^n(x) = x), \quad \text{para cada } n \geq 1$$

Una axiomatización para $(\mathbb{N}, 0, S)$

Es fácil ver que $\mathcal{N}_S$ satisface a cada oración en Σ_S. Por tanto, $\mathcal{T}(\Sigma_S) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{N}_S)$.

Queremos demostrar la otra dirección ahora. Nos basta demostrar que $\mathcal{T}(\Sigma_S)$ es completa (¿Por qué?)

Entonces debemos demostrar que para cualquier oración ϕ se tiene que $\Sigma_S \models \phi$ o $\Sigma_S \models \neg\phi$.

Nos basta demostrar que para cada oración ψ sin cuantificadores se tiene que $\Sigma_S \models \psi$ o $\Sigma_S \models \neg\psi$ (¿Por qué?).

Una axiomatización para $(\mathbb{N}, 0, S)$

Pero entonces ψ es una combinación Booleana de igualdades de la forma $S^m(0) = S^\ell(0)$.

Es fácil ver que una igualdad de la forma $S^m(0) = S^\ell(0)$ es consecuencia lógica de Σ_S si y sólo si $m = \ell$.

Usando esta propiedad e inducción sobre las fórmulas sin cuantificadores podemos demostrar que para toda fórmula ψ sin cuantificación se tiene que $\Sigma_S \models \psi$ o $\Sigma_S \not\models \psi$.

Modelos no standard para $\mathcal{T}(\Sigma_S)$

Pregunta: ¿Es $\mathcal{N}_S$ el único modelo de Σ_S?

Tome una estructura que contiene a $\mathcal{N}_S$ y a una copia disjunta de los números enteros con sucesor. ¿Satisface esta estructura a Σ_S? ¿Cuál es la cardinalidad de esta estructura?

De hecho, podemos agregar un número arbitrario de copias de los números enteros, y seguir satisfaciendo a Σ_S.

Todas estas estrcuturas son elementalmente equivalentes (¿Por qué?).
Sin embargo, no son isomorfas.